Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 10

Hausaufgabe 37 (A60)

(1) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor mit $F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$. Für $X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und $u, v : X \to X'$ sei $F(u+v) = Fu + Fv$. Man zeige: F ist additiv.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Man zeige: Der Funktor $\mathrm{H}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ist additiv.

Hausaufgabe 38 (A55) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Man zeige: Das Bild von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwindet genau dann, wenn es ein Tupel $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ von Morphismen in $\mathcal{A}$ gibt mit $h^i d_Y^{i-1} + d_X^i h^{i+1} = f^i$ für $i \in \mathbb{Z}$. Diesenfalls heißt $(h^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine *Homotopie*.

Hausaufgabe 39 Sei $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/27$-Mod. Sei $\mathcal{B} = \mathbb{Z}/3$-Mod. Seien

$$\begin{array}{rcl} X & := & (\ldots \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \ldots) \\ Y & := & (\cdots \to 0 \to \underbrace{\mathbb{Z}/27}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \to 0 \to \ldots) \end{array}$$

in $\mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{A}))$.

(1) Man bestimme $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{h_X^k} \tilde{\mathrm{Z}}^k X$ und daraus $\mathrm{H}^k X$ für $k \in \mathbb{Z}$. Man folgere: X ist azyklisch.

(2) Sei $F := (\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} -) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ist FX azyklisch? Ist FX isomorph zu 0 in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$?
Ist X split azyklisch?

(3) Man bestimme $\mathrm{H}^k Y$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Man finde ein $Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A}))$ und einen Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ungleich 0 von X nach Z.

Hausaufgabe 40 (A59) Sei $(X', X, X'') \xrightarrow{(f', f, f'')} (Y', Y, Y'')$ ein Morphismus von der rechtsexakten Sequenz (X', X, X'') zur linksexakten Sequenz (Y', Y, Y'') wie in Lemma 136. Wir verwenden die dortigen Bezeichnungen.

Sei $(\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'') \xrightarrow{(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')} (\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$ entsprechend ein Morphismus von der rechtsexakten Sequenz $(\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'')$ zur linksexakten Sequenz $(\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$, mit entsprechenden Bezeichnungen.

Sei folgendes kommutatives Viereck von Sequenzen gegeben.

$$\begin{tikzcd} (X', X, X'') \arrow[r, "{(f', f, f'')}"] \arrow[d, "{(x', x, x'')}"'] & (Y', Y, Y'') \arrow[d, "{(y', y, y'')}"] \\ (\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'') \arrow[r, "{(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')}"'] & (\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'') \end{tikzcd}$$

Bemerkung 124.(2) gibt uns Morphismen k' mit $k'\tilde{i}' = i'x'$, und k mit $k\tilde{i} = ix$, und k'' mit $k''\tilde{i}'' = i''x''$, und c' mit $r'c' = y'\tilde{r}'$, und c mit $rc = y\tilde{r}$, und c'' mit $r''c'' = y''\tilde{r}''$.

Man zeige die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k'"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"'] & K'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "k''"'] & C' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "c'"] & C \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "c"] & C'' \arrow[d, "c''"] \\ \tilde{K}' \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{K} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \tilde{C}' \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & \tilde{C} \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & \tilde{C}'' \end{tikzcd}$$