$R = (R, +, \cdot)$ Ring :

(Ring 1) : $(R, +)$ abelsche Gruppe

(Ring 2) : $(\cdot)$ ist assoziativ

(Ring 3) : $\exists\, 1_R \in R$ mit $1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R$ für $x \in R$

(Ring 4) : $(\cdot), (+)$ sind distributiv

R heißt kommutativ, falls $(\cdot)$ kommutativ

$R = \mathbb{Z}/4$: Multiplikationstafel

$(\cdot)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

R : Ring

$M = (M, +, \cdot)$ R-Linksmodul,

wobei $(+) : M \times M \longrightarrow M : (m, m') \longmapsto m + m'$

$(\cdot) : R \times M \longrightarrow M : (r, m) \longmapsto r \cdot m$ $(=: rm)$

mit

(LMod 1) $(M, +)$ ist abelsche Gruppe

(LMod 2) $r \cdot (s \cdot m) = (\underbrace{r \cdot s}_{\text{Mult. in } R}) \cdot m$ stets

(LMod 3) $1 \cdot m = m$ stets

(LMod 4) $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$

und $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r' \cdot m$

stets

In Ü aus letzten Fr: Teilweise Abbildungen versehentlich links (traditionell) statt rechts

R: Ring

M, N: R-Linksmoduln

$f : M \longrightarrow N$ heißt **R-linear** oder **Morphismus von R-Linksmoduln**, falls

$$(rm + r'm')f = r(mf) + r'(m'f)$$

für $r, r' \in R$, $m, m' \in M$.

$\mathrm{Kern}(f) := \{ m \in M : mf = 0 \} \subseteq M$: **Kern**

$\mathrm{Im}(f) := \{ mf \in N : m \in M \} \subseteq N$: **Bild** ("image")

$\mathrm{Cokern}(f) := N/\mathrm{Im}(f)$: **Cokern**

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Kern}(f)}", "\text{inj.}"'] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f|^{\mathrm{Im}(f)}"', "\text{surj}"] & & N \arrow[r, "p_{\mathrm{Cokern}(f)}", "\text{surj}"'] & \mathrm{Cokern}(f) \\
& & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "\iota_{\mathrm{Im}(f)}"', "\text{inj}"] & &
\end{tikzcd}$$

$x \longmapsto x$

$m \longmapsto mf$

$y \longmapsto y$

$n \longmapsto n + \mathrm{Im}(f)$

R: Ring

Gegeben: R-Linksmoduln $M_1, \dots, M_\alpha$; $N_1, \dots, N_\beta$; $P_1, \dots, P_\gamma$

Direkte Summe:

$$\bigoplus_{i \in [1,\alpha]} M_i = M_1 \oplus \dots \oplus M_\alpha$$

$$= \{ (m_1, \dots, m_\alpha) : m_i \in M_i \text{ für } i \in [1,\alpha] \}$$

$$(m_1, \dots, m_\alpha) + (m_1', \dots, m_\alpha') := (m_1 + m_1', \dots, m_\alpha + m_\alpha')$$

$$r \cdot (m_1, \dots, m_\alpha) := (r m_1, \dots, r m_\alpha)$$

Gegeben: $f_{i,j} : M_i \to N_j$ R-linear, für $i \in [1,\alpha]$, $j \in [1,\beta]$

Dann:

$$\bigoplus_{i \in [1,\alpha]} M_i \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\alpha,1} & \cdots & f_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} = (f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j \in [1,\beta]} N_j$$

$$(m_1, \dots, m_\alpha) \longmapsto \Big(\sum_{i \in [1,\alpha]} m_i f_{i,1}, \dots, \sum_{i \in [1,\alpha]} m_i f_{i,\beta} \Big)$$

Bem 34: Das Kompositum von

$$\bigoplus_{i \in [1,\alpha]} M_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j \in [1,\beta]} N_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k \in [1,\gamma]} P_k$$

ist

$$\bigoplus_{i \in [1,\alpha]} M_i \xrightarrow{\big(\sum_{j \in [1,\beta]} f_{i,j} \, g_{j,k} \big)_{i,k}} \bigoplus_{k \in [1,\gamma]} P_k$$

"Komposition ist Matrixmultiplikation"

Bew: noch zu machen.

R : Ring

M, N : R-Linksmoduln

$M \xrightarrow{f} N$: R-linear

- Universelle Eigenschaft Kern :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
X \arrow[u, dashed, "\exists ! x'"] \arrow[ur, "x"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\left.\right\}$ X : R-Linksmodul, $X \xrightarrow{x} M$: R-linear

- Universelle Eigenschaft Cokern

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "y"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d, dashed, "\exists ! y'"] \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

$= N/\mathrm{im}(f)$

Y : R-Linksmodul $\left.\right\}$

$N \xrightarrow{y} Y$: R-linear

R, S, T : Ringe

$M = {}_R M_S$, $N = {}_R N_T$: Bimoduln

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_R({}_R M_S, {}_R N_T)$$
$$= \{ M \xrightarrow{f} N : f \text{ ist } R\text{-linear} \}$$

ist ein S-T-Bimodul via

$$m(s \cdot f * t) := (m * s) f * t$$

z.B. ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R({}_R R_R, {}_R N_T) &\xrightarrow{\sim} {}_R N_T \\ f &\longmapsto 1f \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von R-T-Bimoduln

R : Ring

M_R : R-Rechtsmodul

${}_R N$: R-Linksmodul

Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul:

$$\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z}$$

$$= \Big\{ (z_{m,n})_{(m,n)} : z_{m,n}\in \mathbb{Z} \text{ für } (m,n)\in M\times N, \underbrace{\{(m,n)\in M\times N : z_{m,n}\neq 0\}}_{\text{„Träger"}} \text{ endlich} \Big\}$$

Darin: $e_{m,n} = \mathbb{1}_{m,n}$: $\begin{cases} \text{Eintrag } 1 \text{ bei } (m,n) \\ \text{Eintrag } 0 \text{ sonst} \end{cases}$

$$\mathcal{U} := {}_{\mathbb{Z}}\Big\langle \{e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n} : m,m'\in M, n\in N\} \cup \{e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} : m\in M, n,n'\in N\} \cup \{e_{mr,n} - e_{m,rn} : m\in M, n\in N, r\in R\} \Big\rangle$$

Damit sei das Tensorprodukt:

$$M \otimes_R N := \Big(\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z}\Big) \Big/ \mathcal{U}$$

als $\mathbb{Z}$-Modul

Abbildung

Elementartensor

$$\begin{aligned} M\times N &\xrightarrow{\tau} M \otimes_R N \\ (m,n) &\longmapsto e_{m,n} + \mathcal{U} =: m\otimes n \end{aligned}$$

$\hookrightarrow M\otimes_R N = {}_{\mathbb{Z}}\langle m\otimes n : m\in M, n\in N\rangle$

R, S, T : Ringe

${}_S M_R \,,\; {}_R N_T$: Bimoduln

Bem 58

(1) $${}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T = M \underset{R}{\otimes} N$$

ist S-T-Bimodul, für welchen

$$s \cdot (m \otimes n) * t = (s \cdot m) \otimes (n * t) \quad \text{stets}$$

(2) Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} {}_R R_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T &\xrightarrow{\sim} {}_R N_T \\ r \otimes n &\longmapsto r \cdot n \\ 1 \otimes n &\longleftarrow\!\shortmid\; n \end{aligned}$$

von R-T-Bimoduln

(3) Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R R_R &\xrightarrow{\sim} {}_S M_R \\ m \otimes r &\longmapsto m * r \\ m \otimes 1 &\longleftarrow\!\shortmid\; m \end{aligned}$$

von S-R-Bimoduln.

R, S : Ringe

$$ {}_R M_S \xleftarrow{f} {}_R M'_S \qquad R\text{-}S\text{-linear} $$

$$ {}_R N \xrightarrow{g} {}_R N' \qquad R\text{-linear} $$

$$ {}_S X \xleftarrow{h} {}_S X' \qquad S\text{-linear} $$

<u>Lemma 62</u>

(1) Wir haben den Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$
\begin{array}{ccc}
{}_R({}_R M_S \underset{S}{\otimes} {}_S X,\ {}_R N) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{X,M,N}} & {}_S({}_S X,\ {}_R({}_R M_S,\ {}_R N)) \\
\varphi & \overset{\alpha}{\longmapsto} & (x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)) \\
(m \otimes x \mapsto m(x\psi)) & \overset{\beta}{\longleftarrow\!\shortmid} & \psi
\end{array}
$$

Mit anderen Worten:

$$ m(x(\varphi\alpha)) = (m \otimes x)\varphi $$
$$ (m \otimes x)(\psi\beta) = m(x\psi) $$
für $m \in M$, $x \in X$.

<u>Bew</u>: Stand: α wohldef. + $\mathbb{Z}$-linear

β : $\psi\beta$ wohldef. + $\mathbb{Z}$-linear

Zz: • $\psi\beta$ R-linear! – damit dann β wohldef.

• $\alpha \cdot \beta \overset{!}{=} \mathrm{id}_{R(M \otimes_S X,\, N)}$

• $\beta \cdot \alpha \overset{!}{=} \mathrm{id}_{S(X,\, R(M,N))}$

Q : $\mathbb{Z}$-Modul, für welchen gilt:

$$\forall q \in Q \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \exists \tilde{q} \in Q : q = k\tilde{q}$$

Q heißt auch divisibel.

Bsp: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sind divisibel. $\mathbb{Z}$ ist nicht divisibel.

<u>Lemma 67</u> Es ist Q ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

<u>Bew.</u> Sei
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "g'"'] & M \\ Q & \end{tikzcd}$$
Gesucht:
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & M \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Teilgeordnete Menge:

$$\mathcal{F} = \{ (N, h) : M' \subseteq N \subseteq M, \ N \xrightarrow{h} Q \ \mathbb{Z}\text{-lin} \text{ und } h|_{M'} = g' \}$$

$$(N_1, h_1) \leq (N_2, h_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad N_1 \subseteq N_2 \wedge h_1 = h_2|_{N_1}$$

Zorn auf $\mathcal{F}$ anwendbar $\Rightarrow$ (M', g') liegt in maximalem Element (N, h).

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Menge $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ von **Objekten**
- einer Menge $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ von **Morphismen**
- Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \arrow[r, shift left=3, "\mathrm{Start}"] \arrow[r, shift right=3, "\mathrm{Ziel}"'] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{Identität}"'] \end{tikzcd}$$

- einer Abbildung

$$\{(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} : f\,\mathrm{Ziel} = g\,\mathrm{Start}\} \xrightarrow{\mathrm{Komposition}} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$$

$$(f,g) \longmapsto (f,g)\,\mathrm{Komposition} =: f \cdot g = fg$$

Also: $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}, \mathrm{Start}, \mathrm{Identität}, \mathrm{Ziel}, \mathrm{Komposition})$.

Schreibweisen:

- $X\,\mathrm{Identität} =: \mathrm{id}_X = \mathrm{id} = 1_X = 1$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- $f\,\mathrm{Start} = X$, $f\,\mathrm{Ziel} = Y$ $\rightsquigarrow$ $X \xrightarrow{f} Y$ oder $f : X \to Y$ für $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$

Die Eigenschaften (Kat 1 – 4) sollen gelten:

(Kat 1) Für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gilt

$X\,\mathrm{Identität}\,\mathrm{Start} = X \;\wedge\; X\,\mathrm{Identität}\,\mathrm{Ziel} = X$

Kurz: $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$

(Kat 2 – 4) folgen ...

$\mathcal{C}$: Kategorie

$\mathcal{C}^\circ$: entgegengesetzte Kategorie

In $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \cdot g"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

In $\mathcal{C}^\circ$:

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, dashed, "f"'] & Z \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[ll, dashed, bend left] \end{tikzcd}$$

$$g \circ^\circ f := f \cdot g$$

$X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$:

- f Isomorphismus, falls $X \xleftarrow{g} Y$ existiert und $f \cdot g = id_X$, $g \cdot f = id_Y$
- f Retraktion, falls $X \xleftarrow{g} Y$ existiert und $g \cdot f = id_Y$
- f Coretraktion, falls $X \xleftarrow{g} Y$ existiert und $f \cdot g = id_X$
- f Monomorphismus, falls für $T \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ gilt: $uf = vf \Rightarrow u = v$
- f Epimorphismus, falls für $X \xrightarrow{f} Y \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} T$ gilt: $fu = fv \Rightarrow u = v$

$$\begin{tikzcd} & \text{Retraktion} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Epimorphismus} \\ \text{Isomorphismus} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & \text{Coretraktion} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Monomorphismus} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: Kategorien

Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ besteht aus zwei Abbildungen

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Ob}\,F} \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$$

$$\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Mor}\,F} \mathrm{Mor}\,\mathcal{D},$$

} die traditionell Beides geschrieben werden (Kompromiß)

die die Eigenschaften (Fun 1, 2) erfüllen:

(Fun 1) Es kommutieren folgende Vierecke:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Mor}\,F"] \arrow[d, "\mathrm{Start}"'] & \mathrm{Mor}\,\mathcal{D} \arrow[d, "\mathrm{Start}"] \\
\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Ob}\,F"] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Mor}\,F"] \arrow[d, "\mathrm{Ziel}"'] & \mathrm{Mor}\,\mathcal{D} \arrow[d, "\mathrm{Ziel}"] \\
\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Ob}\,F"] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Mor}\,F"] & \mathrm{Mor}\,\mathcal{D} \\
\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Ob}\,F"] \arrow[u, "\mathrm{Identität}"] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{D} \arrow[u, "\mathrm{Identität}"']
\end{tikzcd}$$

(Fun 2) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist

$$(\mathrm{Mor}\,F)(f) \cdot (\mathrm{Mor}\,F)(g) = (\mathrm{Mor}\,F)(f \cdot g)$$

Arbeitsschreibung: $F := \mathrm{Mor}\,F$
$F := \mathrm{Ob}\,F$

Dann:
- $F(X \xrightarrow{f} Y) = (FX \xrightarrow{Ff} FY)$
- $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$

} dank (Fun 1)

- Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist

$$Ff \cdot Fg = F(f \cdot g)$$

} dank (Fun 2)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$: Funktoren zwischen Kategorien

Eine Transformation $a : F \to G$ ist ein Tupel $a = (FX \xrightarrow{aX} GX)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ von Morphismen in $\mathcal{D}$, für welches gilt:

Für $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$ haben wir das kommutative Viereck:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "aX"] \arrow[d, "Fu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GX \arrow[d, "Gu"] \\ FX' \arrow[r, "aX'"] & GX' \end{tikzcd}$$

$\Big\}$ das Tupel $(aX)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ ist natürlich

Schreibung: $F \xrightarrow{a} G$ oder $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$

Identität: $\mathrm{id}_F = (\mathrm{id}_F X)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} := (\mathrm{id}_{FX})_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$

Komposition: Für $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right, "H"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ mit $a\Downarrow$, $b\Downarrow$ ist

$$a \cdot b = ((a \cdot b)X)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$$

$$:= (aX \cdot bX)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$$

Also $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "a\cdot b \Downarrow"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$.

$\leadsto$ Funktorkategorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$:
- Objekte: Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$
- Morphismen: Transformationen dazwischen

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: Kategorien

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$: Funktor

F heißt **Äquivalenz** von Kategorien, wenn es einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ gibt mit $\underbrace{G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}}$ und $\underbrace{F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}}$.

d.h. es existiert eine Isotransformation $G \circ F \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

d.h. es existiert eine Isotransformation $F \circ G \xrightarrow[\sim]{\beta} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "G \circ F"'] \arrow[d, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}\,\sim"] \\ \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend right, "F \circ G"'] \arrow[d, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}\,\sim"] \\ \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} GFX \arrow[r, "\alpha X", "\sim"'] \arrow[d, "GFu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "u"] \\ GFX' \arrow[r, "\alpha X'", "\sim"'] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGY \arrow[r, "\beta Y", "\sim"'] \arrow[d, "FGv"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "v"] \\ FGY' \arrow[r, "\beta Y'", "\sim"'] & Y' \end{tikzcd}$$

stets $\qquad\qquad$ stets

$\mathcal{A}$: Kategorie mit Nullobjekt $0 = 0_{\mathcal{A}}$

$X_1, \dots, X_m \in Ob(\mathcal{A})$, $Y_1, \dots, Y_n \in Ob(\mathcal{A})$

Direkte Summe:
$$\begin{cases} \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m \in Ob(\mathcal{A}) \\ \iota_j : X_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \quad \text{für } j \in [1,m] \\ \pi_j : \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \longrightarrow X_j \quad \text{für } j \in [1,m] \end{cases}$$

mit:

(Summ 1)
$$\begin{tikzcd} & & X_1 \\ S \arrow[r, "\exists ! s"] \arrow[urr, bend left, "s_1"] \arrow[drr, bend right, "s_m"'] & \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_m"'] & \vdots \\ & & X_m \end{tikzcd}$$
$s := (s_1 \dots s_m)$ (Produkt)

(Summ 2)
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[drr, bend left, "t_1"] & & \\ \vdots & \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \arrow[r, "\exists ! t"] & T \\ X_m \arrow[ur, "\iota_m"'] \arrow[urr, bend right, "t_m"'] & & \end{tikzcd}$$
$t := \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$ (Coprodukt)

(Summ 3) $\iota_j \pi_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

Sei $X_i \xrightarrow{f_{i,j}} Y_j$ in $\mathcal{A}$ gegeben für $i \in [1,m]$, $j \in [1,n]$

$$\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$$

ist charakterisiert durch $\iota_k (f_{i,j})_{i,j} \pi_\ell = f_{k,\ell}$ für $k \in [1,m]$, $\ell \in [1,n]$

Man kann auch schreiben: $\iota_k = (0 \dots 0 \underbrace{1}_{\text{Pos. } k} 0 \dots 0)$, $\pi_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}\ \text{Pos. } \ell$.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: additive Kategorien

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ Funktor

F heißt additiv, falls:

- $F 0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$

$\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix}$ epimorph gezeigt hinten

- $F(X_1 \oplus X_2) \underset{\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix}}{\overset{(F\pi_1,\ F\pi_2)}{\rightleftarrows}} FX_1 \oplus FX_2$

$(F\pi_1, F\pi_2)$ monomorph gezeigt hinten

sind sich invertierende Isomorphismen

für $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

Dann: Für $X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} X'$ in $\mathcal{A}$

ist $F(f_1 + f_2) = Ff_1 + Ff_2$

$\mathcal{A}$: additive Kat.

$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$: volle add. Teilkategorie

$\mathcal{A}/\mathcal{N}$: Faktorkategorie

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- ${}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(X,Y) := \overbrace{{}_{\mathcal{A}}(X,Y) \big/ \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)}^{\text{Faktormodul}}$,

wobei $\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$

$$:= \left\{ X \xrightarrow{f} Y : \exists \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "C"] & Y \\ & \underbrace{N}_{\in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})} \arrow[ur, "f''"'] & \end{tikzcd} \right\}$$

$$\underset{\mathbb{Z}\text{-Teilmodul}}{\subseteq} {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$$

- Komposition repräsentantenweise :

$$X \xrightarrow{f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)} Y \xrightarrow{g + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(Y,Z)} Z$$

komponiert zu

$$X \xrightarrow{f \cdot g + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Z)} Z$$

Oft : $f \overset{\text{kurz}}{:=} f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$

Universelle Eigenschaft: $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ additiv, $FN \cong 0_{\mathcal{B}}$ für $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, phantom, "C"] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\exists!\, \bar{F}\ \text{additiv}"'] & \end{tikzcd}$$

Restklassenfunktor

$\mathcal{A}$: add. Kat.

$\mathcal{A}$ heißt abelsch, falls (Ab 1, 1°, 2, 2°) gelten

definiert über universelle Eigenschaft

(Ab 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Kern

(Ab 1°) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Cokern

(Ab 2) Jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist Kern eines Morphismus in $\mathcal{A}$

(Ab 2°) Jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}$ ist Cokern eines Morphismus in $\mathcal{A}$

Bsp
- R-Mod ist abelsch
- $\mathcal{A}$ abelsch $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^\circ$ abelsch

---

Wechsellemma: $\mathcal{A}$: ab. Kat.

Geg.:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "i"] & \\ L \arrow[r, "j"] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

mit: i Kern von f

j Kern von g

Dann:

es ex.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "C"] & K \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "ig"] & \\ L \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "jf"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

mit: u Kern von ig

v Kern von jf

Dabei darf v auch vorgegeben werden

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: abelsche Kategorien

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$: additiver Funktor

---

$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ in $\mathcal{A}$ heißt

- kurz exakt, falls : i Kern von r und r Cokern von i

  Äquivalent: i Kern von r und r epi.

  Äquivalent: r Cokern von i und i mono

- linksexakt, falls i Kern von r

- rechtsexakt, falls r Cokern von i

Idealfall

F heißt

- exakt, falls (kurz exakt) $\stackrel{F}{\longmapsto}$ (kurz exakt)

- linksexakt, falls (kurz exakt) $\stackrel{F}{\longmapsto}$ (linksexakt)

- rechtsexakt, falls (kurz exakt) $\stackrel{F}{\longmapsto}$ (rechtsexakt)

Normalfall, z. B. Hom-Funktoren

Normalfall, z. B. Tensorprodukt-Funktoren

Sequenz (oder Folge) in $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "f^{i-1}"] \arrow[dr] & X^{i} \arrow[r, "f^{i}"] \arrow[dr, "\bar f^{i}"] & X^{i+1} \arrow[r, "f^{i+1}"] \arrow[dr, "\bar f^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots & \bar f^{i-1} & I_{f^{i-1}} \arrow[u, "\dot f^{i-1}"] & I_{f^{i}} \arrow[u, "\dot f^{i}"] & I_{f^{i+1}} \arrow[u, "\dot f^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Bilder können eingeschoben werden

Diese Sequenz heißt lang exakt, falls

$$\underbrace{I_{f^{i-1}} \xrightarrow{\dot f^{i-1}} X^i \xrightarrow{\bar f^i} I_{f^i}}$$

kurz exakt ist für alle i.

$\mathcal{A}$: abelsche Kategorie

(**)

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, "c"] \\
K' \arrow[r, "i'"] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "c'"] & C'
\end{tikzcd}$$

Kerne $\qquad$ ⊛ $\qquad$ Cokerne

Lemma 134

Für ein kommutatives Viereck (X, Y, X', Y') wie in ⊛ sind äquivalent:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "t"] & & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[d, "y"] \\
& X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

(1) Es ist (X, Y, X', Y') ein Pullback

(2) Es ist die Diagonalsequenz

$$X \xrightarrow{(x\ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\binom{f'}{-y}} Y'$$

linksexakt, d.h. es ist $(x\ f)$ ein Kern von $\binom{f'}{-y}$

(3) In einer Vervollständigung wie in (**) ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.

(4) In jeder Vervollständigung wie in (**) ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.

Beweis

$$\begin{array}{ccc} (1) & \Leftrightarrow & (2) \\ & & \Downarrow \\ (3) & \Leftarrow & (4) \end{array}$$

! ⇑

noch zu machen

↑ es gibt zu ⊛ eine Vervollständigung (**) dank Bem 124.(2).

$\mathcal{A}$: abelsche Kategorie

$X \in Ob(\mathcal{A})$

X heißt projektiv, falls ${}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ exakt ist.

Dh :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "\exists u"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] \\ I \arrow[r, two heads, "r"'] & I'' \end{tikzcd}$$

X heißt injektiv, falls ${}_{\mathcal{A}}(-,X) : \mathcal{A}^{\circ} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ exakt ist.

Dh :

$$\begin{tikzcd} & X \\ I \arrow[ur, dashed, "\exists u"] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & I' \arrow[l, hook', "i"] \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

Also genau wie bei Moduln.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$: abelsche Kategorien

---

- $C(\mathcal{A})$: Komplexe mit Werten in $\mathcal{A}$ — Differentialbedingung

$$X = (\cdots \to X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \to \cdots) \quad \text{mit } d_X^i d_X^{i+1} = 0$$

$C_{spaz}(\mathcal{A}) \subseteq C(\mathcal{A})$: volle Teilkategorie der split azyklischen Komplexe, also solche von der Form

$$\left(\cdots \longrightarrow T^i \oplus T^{i+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} T^{i+1} \oplus T^{i+2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} T^{i+2} \oplus T^{i+3} \longrightarrow \cdots \right)$$

und isomorphe dazu

- $K(\mathcal{A}) := C(\mathcal{A}) / C_{spaz}(\mathcal{A})$: Homotopiekategorie der Komplexe mit Werten in $\mathcal{A}$

oft: $[f] =: f$

Morphismen in $K(\mathcal{A})$: $X \xrightarrow{[f]} Y$,

wobei • $X, Y \in \mathrm{Ob}(K(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(C(\mathcal{A}))$ Komplexe

- $X \xrightarrow{f} Y$ Komplexmorphismus
- $[f] = [g] \iff X \xrightarrow{f-g} Y$, $\exists$: $X \xrightarrow{a} C \xrightarrow{b} Y$ (split azyklisch)

- $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$: additiver Funktor

$\rightsquigarrow$

$$K(\mathcal{A}) \xrightarrow{K(F)} K(\mathcal{B})$$

"F punktweise anwenden"

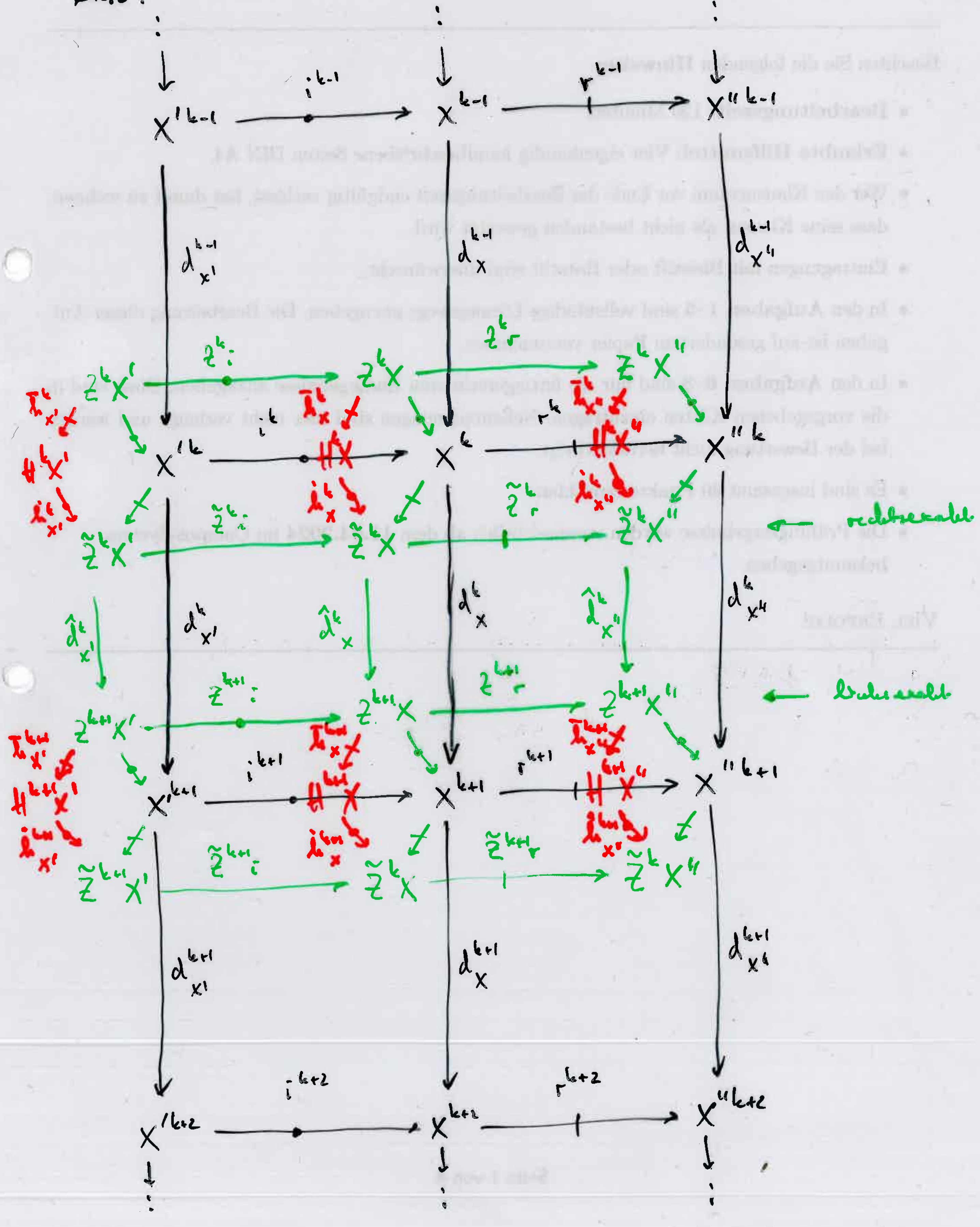
$$\begin{pmatrix} \cdots \to X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \to \cdots \\ \downarrow u^i & & \downarrow u^{i+1} \\ \cdots \to Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \to \cdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cdots \to FX^i & \xrightarrow{Fd_X^i} & FX^{i+1} \to \cdots \\ \downarrow Fu^i & & \downarrow Fu^{i+1} \\ \cdots \to FY^i & \xrightarrow{Fd_Y^i} & FY^{i+1} \to \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ \downarrow [u] \\ Y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} K(F)(X) \\ \downarrow K(F)([u]) \\ K(F)(Y) \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} FX \\ \downarrow [Fu] \\ FY \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$: abelsche Kategorie

$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$: kurz exakte Sequenz in $C(\mathcal{A})$

Also:



$\mathcal{A}$: abelsche Kategorie

$K(\mathcal{A}) = C(\mathcal{A}) / C_{spat}(\mathcal{A})$: Homotopiekategorie

$K^{res}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \subseteq K(\mathcal{A})$: volle Teilkategorie

$$\text{mit } \mathrm{Ob}\big(K^{res}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})\big) := \left\{ I \in \mathrm{Ob}(K(\mathcal{A})) : \begin{array}{l} I^k = 0 \text{ für } k \leq -1 \\ I^k \text{ inj. für } k \geq 0 \\ H^k I \cong 0 \text{ für } k \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots \\ & H^0 I \arrow[ur, "h^0_I"'] & & & & \end{tikzcd}$$

linksexakt

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^0"] & \mathcal{A} \\ K^{res}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "H^0|_{K^{res}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Auflösungsäquivalenz</u>:

Falls $\mathcal{A}$ genügend Injektive hat,

dann ist $H^0|_{K^{res}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})} : K^{res}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$

eine Äquivalenz von Kategorien.

<u>Hufeisenlemma</u>

$\mathcal{A}$: ab. Kat. mit genügend Injektiven

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & & \underbrace{\hphantom{I'^0 \to I'^1 \to I'^2 \to I'^3 \to \cdots}}_{\text{inj. Auflösung von } X'} & & & \\
\cdots 0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "i"] & I'^0 \arrow[r, "d^0_{I'}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] & I'^1 \arrow[r, "d^1_{I'}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] & I'^2 \arrow[r, "d^2_{I'}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] & I'^3 \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] & \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "\begin{pmatrix}\boxed{\hat{e}'} & re''\end{pmatrix}"] \arrow[d, "r"] & I'^0 \oplus I''^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^0_{I'} & 0 \\ \boxed{w^0} & d^0_{I''}\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & I'^1 \oplus I''^1 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^1_{I'} & 0 \\ \boxed{?} & d^1_{I''}\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & I'^2 \oplus I''^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^2_{I'} & 0 \\ \boxed{?} & d^2_{I''}\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & I'^3 \oplus I''^3 \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & X'' \arrow[r, "e''"] & I''^0 \arrow[r, "d^0_{I''}"] & I''^1 \arrow[r, "d^1_{I''}"] & I''^2 \arrow[r, "d^2_{I''}"] & I''^3 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & \overbrace{\hphantom{I''^0 \to I''^1 \to I''^2 \to I''^3 \to \cdots}}^{\text{inj. Auflösung von } X''} & & &
\end{tikzcd}
$$

Ziel: In der Mitte injektive Auflösung von X.

Schon erreicht:

$$
\begin{pmatrix}\hat{e}' & re''\end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^0_{I'} & 0 \\ w^0 & d^0_{I''}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},
$$

d.h. $\hat{e}' d^0_{I'} + r e'' w^0 = 0$

$\mathcal{A}$: abelsche Kategorie mit genügend Injektiven

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) := H^k\big(\mathcal{A}(X, \mathrm{IRes}\, Y)\big)$$

$$\cong H^k\big(\mathcal{A}(X, J)\big),$$

wenn J eine injektive Auflösung von Y ist:

$$Y \to \underbrace{J^0 \to J^1 \to J^2 \to \cdots}_{J}$$

$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

Position 0

Links exakt

$$\left(\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & (\mathrm{IRes}\,X)^0 \arrow[r, "d^0"] & (\mathrm{IRes}\,X)^1 \arrow[r, "d^1"] & (\mathrm{IRes}\,X)^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots
\end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd}
\mathrm{Konz}\,X \arrow[d, "eX"] \\
\mathrm{IRes}\,X
\end{tikzcd}\right)$$

$e = (eX)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} : \mathrm{Konz} \to \mathrm{IRes}$

ist eine Transformation