M. Künzer

Homologische Algebra, SoSe 24

Lösung 12

Hausaufgabe 45 Wir arbeiten in der Kategorie $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/81$-Mod. Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/9$.

(1) Man löse $\mathbb{Z}/3$ und $\mathbb{Z}/9$ injektiv auf. Man bilde damit und mit der betrachteten Sequenz ein Hufeisendiagramm, d.h. man finde eine punktweise split kurz exakte Sequenz von injektiven Auflösungen, die unter H^0 auf eine Sequenz isomorph zur betrachteten abgebildet werden.

(2) Man berechne für die betrachtete kurz exakte Sequenz die lang exakte $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, -)$-Sequenz im Bereich $* \leqslant 2$ bis auf Isomorphie.

Dabei berechne man die Konnektoren nicht, sondern bestimme alle an diesen Stellen in Frage kommenden Morphismen, für welche die Sequenz lang exakt wird.

Lösung.
Zu (1). Es ist $\mathbb{Z}/81$ ein injektives Objekt in $\mathbb{Z}/81$-Mod.
Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/27 \arrow[dr, tail, "3"] & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, tail, "27"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[dr, tail, "3"] & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, tail, "27"] & \\
\mathbb{Z}/3 \arrow[r, tail, "27"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/81}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/81 \xrightarrow{27} \mathbb{Z}/81 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/81 \xrightarrow{27} \mathbb{Z}/81 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}/3$, mit $\mathbb{Z}/3 \overset{27}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}/81$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.
Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, tail, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, tail, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, tail, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, tail, "9"] & \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, tail, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \arrow[ur, two heads, "1"] & & \mathbb{Z}/81 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/81}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/81 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/81 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/81 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/81 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}/3$, mit $\mathbb{Z}/3 \overset{27}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}/81$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.
Wir setzen ein Hufeisendiagramm an.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/3 \arrow[r, tail, "27"] \arrow[d, tail, "9"'] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \ldots \\
\mathbb{Z}/27 \arrow[r, tail, "(a\ 9)"] \arrow[d, two heads, "1"'] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ b_0 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ b_1 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ b_2 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ b_3 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \ldots \\
\mathbb{Z}/3 \arrow[r, tail, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Das obere linke kommutative Viereck verlangt $9a \equiv_{81} 27$. Wir wählen $a = 3$.
Die Differentialbedingung $\begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b_0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ verlangt $9 + 9b_0 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_0 = -1$.
Die Differentialbedingung $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ b_1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ verlangt $-27 + 9b_1 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_1 = 3$.
Die Differentialbedingung $\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b_2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ verlangt $9 + 9b_2 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_2 = -1$.
Die Differentialbedingung $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ b_3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ verlangt $-27 + 9b_3 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_3 = 3$.
Usf.
Somit erhalten wir folgende injektive Hufeisenauflösung.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r] \arrow[d, "(1\,0)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/81 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

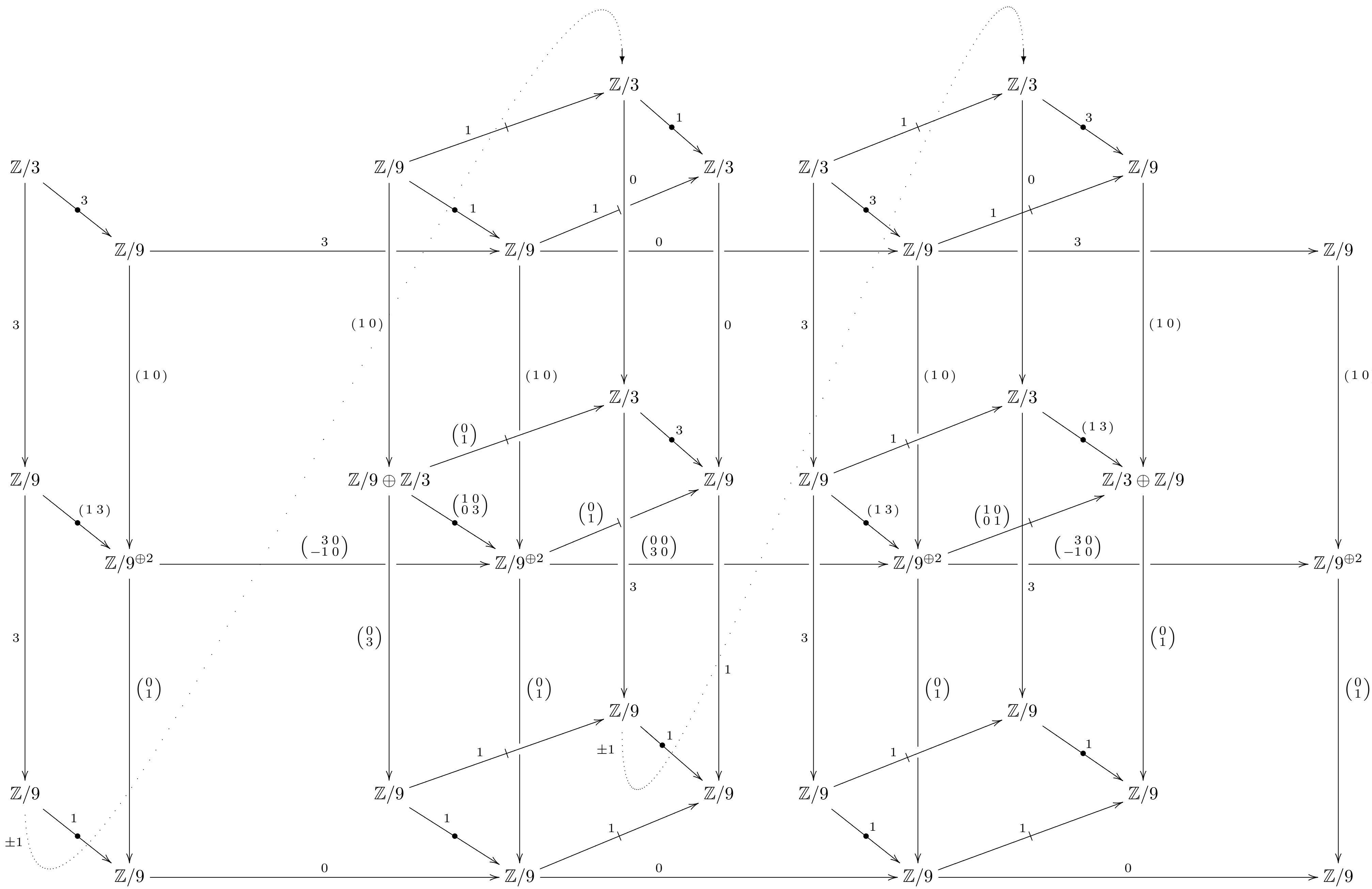
Zu (2). Zur Berechnung der lang exakten $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, -)$-Sequenz ist auf diese injektive Hufeisenauflösung der Funktor ${}_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, -)$ anzuwenden. Das Resultat wollen wir sogleich isomorph ersetzen.
Für einen Faktor $a \in \mathbb{Z}$ haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{9x} \mathbb{Z}/81) \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "a"'] & {}_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/81) \arrow[d, "{}_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, a)"] \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] & {}_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/81) \\
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{9x} \mathbb{Z}/81)
\end{tikzcd}$$

Denn ein Repräsentant x im linken oberen Eck wird auf beiden Wegen auf $(\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{9ax} \mathbb{Z}/81)$ im rechten unteren Eck abgebildet.
Folglich können wir bis auf Isomorphie den Funktor ${}_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, -)$ dadurch auf die gefundene injektive Hufeisenauflösung anwenden, indem wir jedes Objekt $\mathbb{Z}/81$ ersetzen durch $\mathbb{Z}/9$ und dabei die Repräsentanten der Morphismen beibehalten. Sodann können wir die Repräsentanten noch modulo 9 reduzieren. Wir erhalten folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "(1\,0)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbb{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Nun haben wir an den Positionen 0, 1 und 2 die Homologie zu nehmen und die induzieren Morphismen einzutragen. Wir brauchen also die Spalten an den Positionen 0, 1, 2, 3.
Es ist H^0 isomorph zu Z^0.
Sodann müssen Kandidaten für die Konnektoren (gepunktet eingetragen) so gefunden werden, daß eine lang exakte Sequenz entsteht.



$\mathbb{Z}/3$ $\mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/3$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/3$ $\mathbb{Z}/3$ $\mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/3$ $\mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/3$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/9^{\oplus 2}$ $\mathbb{Z}/9^{\oplus 2}$ $\mathbb{Z}/9^{\oplus 2}$ $\mathbb{Z}/9^{\oplus 2}$
$\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$ $\mathbb{Z}/9$
3 3 3 1 1 1 0 1 3 1 3 3 0 3
$(1\ 3)$ $(1\ 0)$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-3&0\\-1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $(1\ 3)$
± 1 ± 1 0 0 0

Als Kandidaten für die Konnektoren können an beiden Stellen 1 oder -1 genommen werden, beide machen die Sequenz an der betreffenden Stelle exakt.

Wir haben die lang exakte $\operatorname{Ext}^*_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,-)$-Sequenz im gefragten Bereich bis auf Isomorphie bestimmt wie in folgendem kommutativen Diagramm dargestellt.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,3)"'] & \mathbb{Z}/3 \arrow[d, "3"] \\
\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/27) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,1)"'] & \mathbb{Z}/9 \arrow[d, "3"] \\
\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/9) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[d, "\pm 1"] \\
\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,3)"'] & \mathbb{Z}/3 \arrow[d, "0"] \\
\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/27) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,1)"'] & \mathbb{Z}/3 \arrow[d, "3"] \\
\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/9) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[d, "\pm 1"] \\
\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,3)"'] & \mathbb{Z}/3 \arrow[d, "0"] \\
\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/27) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,1)"'] & \mathbb{Z}/3 \arrow[d, "3"] \\
\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9,\mathbb{Z}/9) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}/9
\end{tikzcd}
$$

Hausaufgabe 46 Man zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Sei R ein Ring.

(1) Sei $P \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv. Sei $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$. Es ist $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P,Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 0$.

(2) Sei $P \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv. Sei $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$. Es ist $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P,Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

(3) Sei $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$. Sei $I \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv. Es ist $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,I) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

(4) Sei $M \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$. Es ist $\operatorname{Tor}^R_k(R,M) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

Lösung.

Zu (1). Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$. Sei $P = \mathbb{Z}$, was in $\mathcal{A}$ ein projektives Objekt ist. Sei $Y = \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\operatorname{Ext}^0_{\mathcal{A}}(P,Y) \;\simeq\; {}_{\mathcal{A}}(P,Y) \;=\; {}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \;\simeq\; \mathbb{Z} \;\not\simeq\; 0\,.$$

Zu (2). Die Aussage ist richtig. Da P projektiv ist, ist der Funktor $F := {}_{\mathcal{A}}(P, -)$ exakt.
Zum injektiven Auflösen von Y bilden wir einen azyklischen Komplex

$$\ldots \to 0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$$

mit I^j injektiv für $j \geqslant 0$. Dieser wird vom exakten Funktor $F = {}_{\mathcal{A}}(P, -)$ auf den azyklischen Komplex

$$\ldots \to F0 \to FY \to FI^0 \to FI^1 \to FI^2 \to \ldots$$

abgebildet. Somit verschwinden seine Homologieobjekte. Also verschwinden die Homologieobjekte des Komplexes

$$\ldots \to 0 \to FI^0 \to FI^1 \to FI^2 \to \ldots$$

an Position $\geqslant 1$. Mit anderen Worten, es ist

$$0 \simeq \mathrm{H}^k FI \simeq (\mathrm{R}^k F)(Y) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P, Y) .$$

für $k \geqslant 1$.

Zu (3). Die Aussage ist richtig.
Wir lösen I injektiv wie folgt auf: Wir bilden den azyklischen Komplex

$$\ldots \to 0 \to I \xrightarrow{\mathrm{id}_I} I \to 0 \to 0 \to \ldots$$

mit I an den Positionen -1 und 0. Daraus entsteht die injektive Auflösung

$$\ldots \to 0 \to I \to 0 \to 0 \to \ldots$$

mit I an Position 0. Wir wenden $F := {}_{\mathcal{A}}(X, -)$ auf diese injektive Auflösung an und erhalten

$$\ldots \to 0 \to FI \to 0 \to 0 \to \ldots$$

Diese Komplex hat verschwindende Homologieobjekte an Positionen $\geqslant 1$. Mit anderen Worten, es ist

$$0 \simeq (\mathrm{R}^k F)(X) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, I) .$$

für $k \geqslant 1$.

Zu (4). Die Aussage ist richtig. Da wir den Isomorphismus $R \otimes_R X \xrightarrow{\sim} X$, $r \otimes x \mapsto rx$, für $X \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$ haben, der natürlich in X ist, ist der Funktor $F := R \otimes_R -$ exakt.
Zum projektiven Auflösen von M bilden wir einen azyklischen Komplex

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \to \ldots$$

mit P_j projektiv für $j \geqslant 0$. Dieser wird vom exakten Funktor F auf den azyklischen Komplex

$$\ldots \to FP_2 \to FP_1 \to FP_0 \to FM \to F0 \to \ldots$$

abgebildet. Somit verschwinden seine Homologieobjekte. Also verschwinden die Homologieobjekte des Komplexes

$$\ldots \to FP_2 \to FP_1 \to FP_0 \to 0 \to \ldots$$

an Position $\geqslant 1$. Mit anderen Worten, es ist

$$0 \simeq \mathrm{H}_k FP \simeq (\mathrm{L}^k F)(M) = \mathrm{Tor}^R_k(R, M) .$$

für $k \geqslant 1$.

Hausaufgabe 47

(1) Man interpretiere Hausaufgabe 42 als Berechnung des Bildes eines Morphismus nach Anwendung eines rechtsabgeleiteten Funktors, bis auf Isomorphie.

(2) Aus dem Ergebnis läßt sich ein Morphismus in einer lang exakten R^*F-Sequenz als epimorph erkennen. Welcher?

(3) Aus dem Ergebnis läßt sich ein Morphismus in einer lang exakten R^*F-Sequenz als monomorph erkennen. Welcher?

Lösung.
Zu (1). Wir schreiben $F := {}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, -) : \mathbb{Z}/27\text{-Mod} \to \mathbb{Z}/9\text{-Mod}$.

Zur Berechnung des Bildes von $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ in $\mathbb{Z}/27$-Mod unter R^2F lösen wir $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ in $\mathbb{Z}/27$-Mod injektiv auf und erhalten einen Komplexmorphismus $I \xrightarrow{g} J$, wie in Hausaufgabe 42.(1) geschehen.

Sodann wenden wir F punktweise an, um $F(I \xrightarrow{g} J)$ zu bilden, wie in Hausaufgabe 42.(2) geschehen.

Dann wenden wir den Homologiefunktor H^2 an und erhalten

$$(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J) \;\simeq\; ((\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/9) \xrightarrow{{}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9,1)} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/3))\;,$$

also eine Isomorphie von Diagrammen auf $\{0,1\}^{\mathrm{k}}$.
Dies wurde in Hausaufgabe 42.(3) durchgeführt. Wir haben dort

$$((\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/9) \xrightarrow{{}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9,1)} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/3)) \;\simeq\; (\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J) \;\simeq\; (\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3)$$

berechnet, wobei der Morphismus $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ angesprochen wird.

Insbesondere ist $(\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/9) \xrightarrow{(\mathrm{R}^2F)(1)} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/3)$ ein Isomorphismus.

Zu $(2,3)$. Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ in $\mathbb{Z}/27$-Mod.
Wir haben aus der zugehörigen lang exakten R^*F-Sequenz den Ausschnitt

$$\cdots \to (\mathrm{R}^1F)(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{\partial_1} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{(\mathrm{R}^2F)(3)} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/9) \xrightarrow[\sim]{(\mathrm{R}^2F)(1)} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{\partial_2} (\mathrm{R}^3F)(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{(\mathrm{R}^3F)(3)} (\mathrm{R}^3F)(\mathbb{Z}/9) \to \ldots,$$

wobei der eingetragene Isomorphismus aus (1) resultiert und wobei die auftretenden Konnektoren mit ∂_1 und ∂_2 bezeichnet seien.
Da der Kern von $(\mathrm{R}^2F)(1)$ verschwindet, ist $(\mathrm{R}^2F)(3) = 0$ und also $(\mathrm{R}^1F)(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{\partial_1} (\mathrm{R}^2F)(\mathbb{Z}/3)$ ein Epimorphismus.

Da der Cokern von $(\mathrm{R}^2F)(1)$ verschwindet, ist $\partial_2 = 0$ und also $(\mathrm{R}^3F)(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{(\mathrm{R}^3F)(3)} (\mathrm{R}^3F)(\mathbb{Z}/9)$ ein Monomorphismus.

Hausaufgabe 48

(1) Man berechne $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3)$ für $k \geqslant 0$ bis auf Isomorphie.

(2) Man bestimme ein $k \geqslant 0$ mit $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \not\simeq 0$, aber $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \simeq 0$.

Lösung.

Zu (1). Es ist $\mathbb{Z}/27$ projektiv in $\mathbb{Z}/27$-Mod.

Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \\
\ldots & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z}/3
\end{tikzcd}$$

Somit erhalten wir die folgende projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/3$.

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Für einen Faktor $a \in \mathbb{Z}$ haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$(x+9\mathbb{Z}) \otimes (y+27\mathbb{Z}) \longmapsto xy+9\mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/9 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathbb{Z}/9 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} a"'] & \mathbb{Z}/9 \arrow[d, "a"] \\
\mathbb{Z}/9 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}/9
\end{tikzcd}$$

$$(x+9\mathbb{Z}) \otimes (y+27\mathbb{Z}) \longmapsto xy+9\mathbb{Z}$$

Denn auf beiden Wegen wird der Elementartensor $(x+9\mathbb{Z})\otimes(y+27\mathbb{Z})$ nach rechts unten auf $axy+9\mathbb{Z}$ abgebildet. Folglich können wir bis auf Isomorphie den Funktor $\mathbb{Z}/9 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} -$ dadurch auf die gefundene projektive Auflösung anwenden, indem wir jedes Objekt $\mathbb{Z}/27$ ersetzen durch $\mathbb{Z}/9$ und dabei die Repräsentanten der Morphismen beibehalten. Sodann können wir die Repräsentanten noch modulo 9 reduzieren. Wir erhalten folgenden Komplex.

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Wir berechnen wie folgt die Homologie an jeder Stelle.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "3"] & & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "1"] & & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "3"] & & & & \\
 & & \mathbb{Z}/3 \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"] & & \mathbb{Z}/9 & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"] & & \mathbb{Z}/3 & \mathbb{Z}/3 \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"] & & \mathbb{Z}/9 & & \mathbb{Z}/3 & \\
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}/9 \arrow[rr, "0"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rrr, "3"] & & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rrr, "0"] & & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "3"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

Usf.

Folglich ist $\operatorname{Tor}_k^{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \simeq \mathbb{Z}/3$ für $k \geqslant 0$.

Zu (2). Wir haben über $\mathbb{Z}$ den azyklischen Komplex

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Somit haben wir folgende projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/3$.

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Anwenden des Funktors $\mathbb{Z}/9 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} -$ liefert nach isomorpher Ersetzung folgenden Komplex.

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Hierbei steht $\mathbb{Z}/9$ an den Positionen 1 und 0.

Bilden der Homologie H_k an den Positionen $k \geqslant 0$ liefert

$$\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \;\simeq\; \mathbb{Z}/3$$

für $k \in \{0, 1\}$ (war nicht verlangt), aber

$$\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \;\simeq\; 0$$

für $k \geqslant 2$.

Somit ist z.B. $\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \simeq \mathbb{Z}/3 \not\simeq 0$ nach (1), aber $\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \simeq 0$.