M. Künzer

Lösung 11

Hausaufgabe 41 (A61) Man zeige oder widerlege.
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

(1) Sei $X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind zwei der Komplexe X', X, X'' azyklisch, so auch der dritte.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind X und Y azyklisch, so auch I_f .

Lösung. Wir werden kommentarlos verwenden, daß $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$ genau dann azyklisch ist, wenn $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ ist für $k \in \mathbb{Z}$; cf. Bemerkung 143.

Zu (1). Die Aussage ist richtig.

Seien X' und X'' azyklisch. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Es sind $\mathrm{H}^k X'$ und $\mathrm{H}^k X''$ isomorph zu 0. Die lang exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k X'' \longrightarrow \cdots$$

gibt also eine kurz exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow 0$; cf. Lemma 145. Es folgt $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k X$. Insgesamt ist also auch X azyklisch.

Seien X und X'' azyklisch. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Es sind $\mathrm{H}^{k-1} X''$ und $\mathrm{H}^k X$ isomorph zu 0. Die lang exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1} X'' \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow \cdots$$

gibt also eine kurz exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \longrightarrow 0$; cf. Lemma 145. Es folgt $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k X'$. Insgesamt ist also auch X' azyklisch.

Seien X und X' azyklisch. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Es sind $\mathrm{H}^k X$ und $\mathrm{H}^{k+1} X'$ isomorph zu 0. Die lang exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k X'' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1} X' \longrightarrow \cdots$$

gibt also eine kurz exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{H}^k X'' \longrightarrow 0$; cf. Lemma 145. Es folgt $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k X''$. Insgesamt ist also auch X'' azyklisch.

Zu (2). Die Aussage ist falsch.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit einem Objekt $U \not\simeq 0$.
(Man kann e.g. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ und $U = \mathbb{Z}$ nehmen.)
Betrachte die folgenden, vertikal eingetragenen Morphismen von Komplexen.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & U \arrow[r, "1"] \arrow[d, two heads, "1"'] & U \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & U \arrow[r] \arrow[d, tail, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "1"] & U \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Der obere und der untere Komplex sind split azyklisch.

Das Homologieobjekt des mittleren Komplexes an der Stelle U ist dagegen isomorph zu U und also nicht zu 0. Also ist der mittlere Komplex nicht azyklisch.

Nun ist der obere Komplexmorphismus epimorph, der untere monomorph. Der mittlere Komplex ist also isomorph zu I_f , wenn f das Kompositum der beiden Komplexmorphismen bezeichnet. Insbesondere verschwindet die Homologie von I_f nicht an jeder Stelle. Somit ist I_f nicht azyklisch.

Hausaufgabe 42 Wir arbeiten in $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/27\text{-Mod}$.

(1) Man löse den Morphismus $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ injektiv auf, um einen Komplexmorphismus $I \xrightarrow{g} J$ zu erhalten.

(2) Sei $F := {}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, -) : \mathbb{Z}/27\text{-Mod} \to \mathbb{Z}/9\text{-Mod}$.
Man berechne $F(I \xrightarrow{g} J)$ bis auf Isomorphie.

(3) Man berechne $(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J)$ bis auf Isomorphie.

Lösung.
Zu (1). Es ist $\mathbb{Z}/27$ ein injektives Objekt in $\mathbb{Z}/27$-Mod.
Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/27}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}/9$, mit $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.
Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbb{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & \\
\mathbb{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbb{Z}/27 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/27}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}/9$, mit $\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.
Wir ergänzen den gegebenen Morphismus $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ wie folgt zu einem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & \ldots \\
\mathbb{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Damit ist die gesuchte injektive Auflösung $I \xrightarrow{g} J$ wie folgt bestimmt.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbb{Z}/27}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbb{Z}/27 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Zu (2). Für einen Faktor $a \in \mathbb{Z}$ haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3x} \mathbb{Z}/27) \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "a"] & {}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/27) \arrow[d, "{}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, a)"] \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] & {}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/27) \\
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3x} \mathbb{Z}/27)
\end{tikzcd}$$

Denn ein Repräsentant x im linken oberen Eck wird auf beiden Wegen auf $(\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3ax} \mathbb{Z}/27)$ im rechten unteren Eck abgebildet.

Folglich können wir bis auf Isomorphie den Funktor F auf $I \xrightarrow{g} J$ dadurch anwenden, daß jedes Objekt $\mathbb{Z}/27$ ersetzt wird durch $\mathbb{Z}/9$ und dabei die Repräsentanten der Morphismen beibehalten werden. Dies gibt folgenden Komplexmorphismus, der als Diagramm isomorph zu $F(I \xrightarrow{g} J)$ ist.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] \arrow[d, "3"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] \arrow[d, "3"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbb{Z}/9}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Zu (3). Im Komplexmorphismus, der in (2) bestimmt wurde, tragen wir an Position 2 die Objekte Z^2, $\tilde{\mathrm{Z}}^2$ und H^2 ein, sowie die zugehörigen Morphismen, die ein kommutatives Diagramm liefern. Dabei werden die Wahlen von Kern, Cokern und Bild wie angegeben getroffen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/3 \arrow[drr, "1"] \arrow[ddd, "1"] & & & \\
 & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[drr, "1"] \arrow[ddd, "1"] & & & \mathbb{Z}/3 \arrow[ddd, "3"] & \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[rrr, "3"] \arrow[ddd, "1"] & & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "0"] \arrow[ddd, "3"] & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ddd, "1"] \\
 & & \mathbb{Z}/3 \arrow[drr, "3"] & & & \\
 & \mathbb{Z}/3 \arrow[ur, "1"] \arrow[drr, "3"] & & & \mathbb{Z}/9 & \\
\mathbb{Z}/9 \arrow[rrr, "0"] & & & \mathbb{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "3"] & & \mathbb{Z}/9
\end{tikzcd}
$$

Somit ist $(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J)$ bis auf Isomorphie berechnet zu $(\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3)$.

Hausaufgabe 43 (A56) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(1) Man zeige die Äquivalenz von (i) und (ii).

(i) Es sind ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=)$ und ${}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ isomorphe Funktoren von $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}$ nach (Sets).

(ii) Es gibt Transformationen $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ mit $(F\varepsilon X)(\eta FX) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $(\varepsilon GY)(G\eta Y) = 1_{GY}$ für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$.

Gelten (i, ii), so heißt F *linksadjungiert* zu G, und G *rechtsadjungiert* zu F, geschrieben $F \dashv G$. Es heißt ε eine *Einheit* und η eine *Coeinheit* dieser Adjunktion.

(2) Sei $G \circ F \simeq 1$ und $F \circ G \simeq 1$. Man zeige: $F \dashv G$.

(3) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additiv. Sei $F \dashv G$. Man zeige, daß F additiv ist.

(4) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsch. Sei $F \dashv G$. Man zeige, daß F rechtsexakt ist.

Lösung.

Zu (1).

Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ eine Isotransformation von Funktoren von $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}$ nach (Sets). Wir schreiben $\Phi_{X,Y} := \Phi(X,Y)$ für $(X,Y) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B})$, i.e. für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Die Natürlichkeit von Φ besagt für $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{A}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$, daß

$$\begin{tikzcd}
{}_{\mathcal{B}}(FX,Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "(Ff)(-)g"'] & {}_{\mathcal{A}}(X,GY) \arrow[d, "f(-)(Gg)"] \\
{}_{\mathcal{B}}(FX',Y') \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"] & {}_{\mathcal{A}}(X',GY')
\end{tikzcd}$$

kommutiert, i.e. daß für $FX \xrightarrow{s} Y$ stets $((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} = f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)$ ist.
Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ setzen wir $\varepsilon X := (1_{FX})\Phi_{X,FX} : X \longrightarrow GFX$. Wir haben zu zeigen, daß $\varepsilon := (\varepsilon X)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}}$ eine Transformation ist. Sei hierzu $X \xrightarrow{f} X'$ in $\mathcal{A}$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, daß $f(\varepsilon X') = (\varepsilon X)(GFf)$. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl}
f(\varepsilon X') & = & f\big((1_{FX'})\Phi_{X',FX'}\big) \\
& = & ((Ff)1_{FX'})\Phi_{X,FX'} \\
& = & (1_{FX}(Ff))\Phi_{X,FX'} \\
& = & (1_{FX})\Phi_{X,FX}(GFf) \\
& = & (\varepsilon X)(GFf)\ .
\end{array}$$

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ setzen wir $\eta Y := (1_{GY})\Phi^{-1}_{GY,Y} : FGY \longrightarrow Y$. Dual zu ε ist auch $\eta := (\eta Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}}$ eine Transformation.
Nun berechnen wir für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$

$$\begin{array}{rcl}
(\varepsilon GY)(G\eta Y) & = & ((1_{FGY})\Phi_{GY,FGY})(G\eta Y) \\
& = & (1_{FGY}(\eta Y))\Phi_{GY,Y} \\
& = & (\eta Y)\Phi_{GY,Y} \\
& = & 1_{GY}\ .
\end{array}$$

Dual ergibt sich auch $(F\varepsilon X)(\eta FX) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Zu (i) $\Leftarrow$ (ii). Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Für $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{B}$ setzen wir

$$(s)\Phi_{X,Y} \ := \ (\varepsilon X)(Gs)\ .$$

Umgekehrt setzen wir für $X \xrightarrow{t} GY$ in $\mathcal{A}$

$$(t)\Phi'_{X,Y} \ := \ (Ft)(\eta Y)\ .$$

Wir haben zu zeigen, daß sich $\Phi_{X,Y}$ und $\Phi'_{X,Y}$ wechselseitig invertieren und daß $\Phi := (\Phi_{X,Y})_{(X,Y)\in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B})}$ natürlich ist.
Zunächst wird

$$\begin{array}{rcl}
((s)\Phi_{X,Y})\Phi'_{X,Y} & = & ((\varepsilon X)(Gs))\Phi'_{X,Y} \\
& = & (F\varepsilon X)(FGs)(\eta Y) \\
& = & (F\varepsilon X)(\eta FX)s \\
& = & s\ .
\end{array}$$

Dual dazu ist auch $((t)\Phi'_{X,Y})\Phi_{X,Y} = t$.
Seien nun $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{A}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{B}$ gegeben. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl}
((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} & = & (\varepsilon X')(GFf)(Gs)(Gg) \\
& = & f(\varepsilon X)(Gs)(Gg) \\
& = & f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)\ .
\end{array}$$

Zu (2). Es gibt ein $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow[\sim]{\alpha} G \circ F$.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathcal{B}}(FX,Y) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{X,Y}} & {}_{\mathcal{A}}(X,GY) \\ s & \longmapsto & (\alpha X)(Gs) \end{array}$$

da αX ein Isomorphismus ist und G gemäß Lemma 96.(1) voll und treu ist. Wie in der letzten Rechnung unter (1) sieht man, daß $\Phi := (\Phi_{X,Y})_{(X,Y)\in\operatorname{Ob}(\mathcal{A}^\circ\times\mathcal{B})}$ eine Transformation ist, denn für $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{A}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{B}$ ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} ((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} & = & (\alpha X')(GFf)(Gs)(Gg) \\ & = & f(\alpha X)(Gs)(Gg) \\ & = & f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)\,. \end{array}$$

Zu (3). Es gibt ein ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$, notiert wie in (1).
Sei $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Es ist ${}_{\mathcal{B}}(F0_{\mathcal{A}},Y) \simeq {}_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{A}},GY)$ einelementig, also $F0_{\mathcal{A}}$ initial, also $F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$; cf. Bemerkung 81.(1).
Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ ist

$$(0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = (0_{FX,FX}0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = ((F0_{X,X})0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = 0_{X,X}\big((0_{FX,Y})\Phi_{X,Y}\big) = 0_{X,GY}\,.$$

Seien X_1, $X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right) : FX_1 \oplus FX_2 \longrightarrow F(X_1 \oplus X_2)$ epimorph ist; cf. Bemerkung 109.(2). Sei $F(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{u} Y$ mit $0 = \left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right) u = \left(\begin{smallmatrix} (F\iota_1)u \\ (F\iota_2)u \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Dann ist

$$0_{X_1\,,GY} \;=\; (0_{FX_1\,,Y})\Phi_{X_1\,,Y} \;=\; ((F\iota_1)u)\Phi_{X_1\,,Y} \;=\; \iota_1\big((u)\Phi_{X_1\oplus X_2\,,Y}\big)\,,$$

und genauso $0_{X_2,GY} = \iota_2\big((u)\Phi_{X_1\oplus X_2\,,Y}\big)$. Es folgt

$$(u)\Phi_{X_1\oplus X_2\,,Y} \;=\; 0_{X_1\oplus X_2\,,GY} \;=\; (0_{F(X_1\oplus X_2),Y})\Phi_{X_1\oplus X_2\,,Y}\,,$$

und somit $u = 0$.
Zu (4). Es gibt ein ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$, notiert wie in (1). Gemäß (3) und (3°) sind F und G additiv.
Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir haben zu zeigen, daß Fr ein Cokern von Fi ist. Sei hierzu $FX \xrightarrow{t} T$ in $\mathcal{B}$ mit $(Fi)t = 0$ gegeben. Es ist $i\big((t)\Phi_{X,T}\big) = ((Fi)t)\Phi_{X',T} = (0_{FX',T})\Phi_{X',T} = 0_{X',GT}$; letztere Gleichheit folgt hierbei aus der Lösung zu (3). Da r ein Cokern zu i ist, gibt es ein $X'' \xrightarrow{u} GT$ in $\mathcal{A}$ mit $(t)\Phi_{X,T} = ru$. Es folgt

$$\big((Fr)\big((u)\Phi^{-1}_{X'',T}\big)\big)\Phi_{X,T} \;=\; r\big(\big((u)\Phi^{-1}_{X'',T}\big)\Phi_{X'',T}\big) \;=\; ru \;=\; (t)\Phi_{X,T}\,,$$

und somit $(Fr)\big((u)\Phi^{-1}_{X'',T}\big) = t$. Für die Eindeutigkeit dieser Faktorisierung bleibt zu zeigen, daß Fr epimorph ist. Ist $(Fr)v = 0_{FX,T}$ für ein $FX'' \xrightarrow{v} T$ in $\mathcal{B}$, so wird $r\big((v)\Phi_{X'',T}\big) = ((Fr)v)\Phi_{X,T} = (0_{FX,T})\Phi_{X,T} = 0_{X,GT}$, also $(v)\Phi_{X'',T} = 0_{X'',GT}$, also $v = 0_{FX'',T}$.

Hausaufgabe 44 (A51) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, in der sich das folgende abspiele. Man zeige.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz, und sei i eine Coretraktion. Dann ist diese kurz exakte Sequenz isomorph zu $X' \xrightarrow{(1\,0)} X' \oplus X'' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} X''$ vermöge eines Isomorphismus der Form $(1_{X'}\,, a, 1_{X''})$.

(2) Sei $V \xrightarrow{m} U$ eine Coretraktion in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ist U azyklisch, so auch V. Ist U split azyklisch, so auch V.

(3) Seien V, $V' \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Es ist $V \oplus V'$ genau dann split azyklisch, wenn V und V' dies sind.

Lösung.
Zu (1). Sei $ip = 1$. Es ist $i(1 - pi) = 0$. Also gibt es ein q mit $rq = 1 - pi$. Da $rqr = (1 - pi)r = r$, ist $qr = 1$.
Beachte ferner, daß $qpi = q(1 - rq) = 0$, und folglich $qp = 0$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, shift right, "i"'] & X \arrow[l, shift right, "p"'] \arrow[r, shift right, "r"'] & X'' \arrow[l, shift right, "q"'] \end{tikzcd}$$

Wir erhalten die folgenden Morphismen von Sequenzen; i.e. in folgendem Diagramm kommutieren alle Vierecke.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "(p\ r)"] & X'' \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, equal] & X' \oplus X'' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\binom{i}{q}"] & X'' \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "r"] & X'' \end{tikzcd}$$

Diese invertieren sich gegenseitig, da $(p\ r)\binom{i}{q} = pi + rq = 1$ und $\binom{i}{q}(p\ r) = \begin{pmatrix} ip & ir \\ qp & qr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zu (2). Sei $V \underset{m}{\overset{n}{\rightleftarrows}} U$ mit $mn = 1$.
Sei U azyklisch. Für $i \in \mathbb{Z}$ erhalten wir mittels Bemerkung 124.(2) Morphismen von Sequenzen wie folgt.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \arrow[r, "\dot{d}_V^{i-1}"] \arrow[d, "b^{i-1}"'] & V^i \arrow[r, "\bar{d}_V^i"] \arrow[d, "m^i"] & \mathrm{I}_{d_V^i} \arrow[d, "b^i"'] \\ \mathrm{I}_{d_U^{i-1}} \arrow[r, "\dot{d}_U^{i-1}"] \arrow[d, "c^{i-1}"'] & U^i \arrow[r, "\bar{d}_U^i"] \arrow[d, "n^i"] & \mathrm{I}_{d_U^i} \arrow[d, "c^i"'] \\ \mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \arrow[r, "\dot{d}_V^{i-1}"] & V^i \arrow[r, "\bar{d}_V^i"] & \mathrm{I}_{d_V^i} \end{tikzcd}$$

Es ist $b^{i-1}c^{i-1} = \mathrm{id}$ und $b^i c^i = \mathrm{id}$ wegen der Eindeutigkeit der Induzierten.
Die zu U gehörige Sequenz ist kurz exakt.
Behauptung. Die zu V gehörige Sequenz ist kurz exakt.
Es genügt zu zeigen, daß für $T \xrightarrow{t} V^i$ mit $t\bar{d}_V^i = 0$ ein $T \xrightarrow{t'} \mathrm{I}_{d_V^{i-1}}$ existiert mit $t'\dot{d}_V^{i-1} \overset{!}{=} t$.
Es ist $tm^i\bar{d}_U^i = t\bar{d}_V^i b^i = 0$. Also gibt es ein $T \xrightarrow{s'} \mathrm{I}_{d_U^{i-1}}$ mit $s'\dot{d}_U^{i-1} = tm^i$.
Sei $t' := s'c^{i-1}$. Es wird $t'\dot{d}_V^{i-1} = s'c^{i-1}\dot{d}_V^{i-1} = s'\dot{d}_U^{i-1}n^i = tm^i n^i = t$. Dies zeigt die *Behauptung.*
Also ist auch V azyklisch.
Sei U split azyklisch. Dann ist $\dot{d}_U^{i-1}$ eine Coretraktion für alle $i \in \mathbb{Z}$, da die entsprechende Aussage in einem zu U isomorphen Komplex der Form wie in Beispiel 131.(2) gilt. Sei etwa $\dot{d}_U^{i-1}s = 1$. Dann ist

$$\dot{d}_V^{i-1}m^i s c^{i-1} \;=\; b^{i-1}\dot{d}_U^{i-1}s c^{i-1} \;=\; b^{i-1}c^{i-1} \;=\; 1\,.$$

Also ist auch $\dot{d}_V^{i-1}$ eine Coretraktion. Es folgt mit (1), daß die zu V gehörige Sequenz isomorph zu

$$\mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \xrightarrow{(1\ 0)} \mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \oplus \mathrm{I}_{d_V^i} \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{I}_{d_V^i}$$

ist, wobei es einen Isomorphismus gibt, der Identitäten auf den äußeren Termen stehen hat.
Verwendet man diese Isomorphismen für alle $i \in \mathbb{Z}$, so erkennt man, daß V split azyklisch ist.

Zu (3). Seien zum einen V und V' split azyklisch.
Sei $i \in \mathbb{Z}$ gegeben. Es ist $\mathrm{I}_{d_V^i} \xrightarrow{\dot{d}_V^i} V^{i+1}$ eine Coretraktion, da die entsprechende Aussage in einem zu V isomorphen Komplex der Form wie in Beispiel 131.(2) gilt. Genauso ist $\mathrm{I}_{d_{V'}^i} \xrightarrow{\dot{d}_{V'}^i} V'^{i+1}$ eine Coretraktion. Die Faktorisierung

$$d_{V\oplus V'}^i \;=\; \begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \bar{d}_V^i & \\ & \bar{d}_{V'}^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{d}_V^i & \\ & \dot{d}_{V'}^i \end{pmatrix}$$

in einen Epimorphismus, gefolgt von einem Monomorphismus zeigt, daß aus $\dot{d}^i_V$ und $\dot{d}^i_{V'}$ Coretraktion folgt, daß $\dot{d}^i_{V\oplus V'}$ eine Coretraktion ist.

Ferner ist $\left(\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{d}^{i+1}_V & \\ & \bar{d}^{i+1}_{V'} \end{pmatrix}\right)$ kurz exakt. Dazu zeigen wir, daß $\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$ ein Kern von $\begin{pmatrix} \bar{d}^{i+1}_V & \\ & \bar{d}^{i+1}_{V'} \end{pmatrix}$ ist. Ist $(\,t\;t'\,)\begin{pmatrix} \bar{d}^{i+1}_V & \\ & \bar{d}^{i+1}_{V'} \end{pmatrix} = (\,0\;0\,)$, so ist $t\bar{d}^{i+1}_V = 0$ und also $t = \hat{t}\dot{d}^i_V$ für ein $\hat{t}$, da $(\dot{d}^i_V\,,\,\bar{d}^{i+1}_V)$ kurz exakt ist. Analog ist $t' = \hat{t}'\dot{d}^i_{V'}$ für ein $\hat{t}'$. Insgesamt ist also $(\,t\;t'\,) = (\,\hat{t}\;\hat{t}'\,)\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$. Die Eindeutigkeit von $(\,\hat{t}\;\hat{t}'\,)$ bezüglich dieser Gleichung folgt aus der Monomorphie von $\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$.

Dank (1) hat dies $V \oplus V'$ split azyklisch zur Folge.

Sei zum anderen $V \oplus V'$ split azyklisch. Dann ist $V \xrightarrow{(\,1\;0\,)} V \oplus V'$ eine Coretraktion. Dank (2) ist V split azyklisch.