Homologische Algebra, SoSe 24

Lösung 10

Hausaufgabe 37 (A60)

(1) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor mit $F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$. Für $X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und $u, v : X \to X'$ sei $F(u+v) = Fu + Fv$. Man zeige: F ist additiv.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Man zeige: Der Funktor $\mathrm{H}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ist additiv.

Lösung.

Zu (1). Seien $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Es genügt zu zeigen, daß $F(X_1 \oplus X_2)\,\big(\,F\pi_1\ F\pi_2\,\big)\,FX_1 \oplus FX_2$ ein Monomorphismus ist. In der Tat ist $\big(\,F\pi_1\ F\pi_2\,\big)$ eine Coretraktion wegen

$$\big(\,F\pi_1\ F\pi_2\,\big)\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix} \;=\; (F\pi_1)(F\iota_1)+(F\pi_2)(F\iota_2) \;=\; F(\pi_1\iota_1)+F(\pi_2\iota_2) \;=\; F(\pi_1\iota_1+\pi_2\iota_2) \;=\; F\,\mathrm{id}_{X\oplus Y} \;=\; \mathrm{id}_{F(X\oplus Y)}\ .$$

Zu (2). Zunächst zeigt der Monomorphismus $\mathrm{Z}^k 0 \rightarrowtail 0$, daß $\mathrm{Z}^k 0 \simeq 0$ ist, so daß der Epimorphismus $\mathrm{Z}^k 0 \twoheadrightarrow \mathrm{H}^k 0$ dann $\mathrm{H}^k 0 \simeq 0$ zur Folge hat.

Desweiteren, sei $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben $\mathrm{H}^k(f+g) \overset{!}{=} \mathrm{H}^k(f) + \mathrm{H}^k(g)$ zu zeigen.

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k X \arrow[r, rightarrowtail, "\iota_{d_X^k}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & X^k \arrow[d, "f^k"] \\
\mathrm{Z}^k Y \arrow[r, rightarrowtail, "\iota_{d_Y^k}"] & Y^k\ .
\end{tikzcd}$$

Es ist also $\mathrm{Z}^k f \cdot \iota_{d_Y^k} = \iota_{d_X^k} \cdot f^k$.

Genauso ist $\mathrm{Z}^k g \cdot \iota_{d_Y^k} = \iota_{d_X^k} \cdot g^k$ und $\mathrm{Z}^k(f+g) \cdot \iota_{d_Y^k} = \iota_{d_X^k} \cdot (f+g)^k$.

Also wird

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Z}^k(f+g) \cdot \iota_{d_Y^k} & = & \iota_{d_X^k} \cdot (f+g)^k \\
& = & \iota_{d_X^k} \cdot (f^k + g^k) \\
& = & \iota_{d_X^k} \cdot f^k + \iota_{d_X^k} \cdot g^k \\
& = & \mathrm{Z}^k f \cdot \iota_{d_Y^k} + \mathrm{Z}^k g \cdot \iota_{d_Y^k} \\
& = & (\mathrm{Z}^k f + \mathrm{Z}^k g) \cdot \iota_{d_Y^k}\ .
\end{array}$$

Da $\iota_{d_Y^k}$ monomorph ist, folgt

$$\mathrm{Z}^k(f+g) \;=\; \mathrm{Z}^k f + \mathrm{Z}^k g\ .$$

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k X \arrow[r, twoheadrightarrow, "\bar{h}_X^k"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[d, "\mathrm{H}^k f"] \\
\mathrm{Z}^k Y \arrow[r, twoheadrightarrow, "\bar{h}_Y^k"] & \mathrm{H}^k Y\ .
\end{tikzcd}$$

Es ist also $\mathrm{Z}^k f \cdot \bar{h}_Y^k = \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k f$.

Genauso ist $\mathrm{Z}^k g \cdot \bar{h}_Y^k = \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k g$ und $\mathrm{Z}^k(f+g) \cdot \bar{h}_Y^k = \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k(f+g)$.

Also wird

$$\begin{array}{rcl}
\bar{h}^k_X \cdot \mathrm{H}^k(f+g) & = & \mathrm{Z}^k(f+g)\cdot \bar{h}^k_Y \\
& = & (\mathrm{Z}^k f + \mathrm{Z}^k g)\cdot \bar{h}^k_Y \\
& = & \mathrm{Z}^k f \cdot \bar{h}^k_Y + \mathrm{Z}^k g \cdot \bar{h}^k_Y \\
& = & \bar{h}^k_X \cdot \mathrm{H}^k f + \bar{h}^k_X \cdot \mathrm{H}^k g \\
& = & \bar{h}^k_X \cdot (\mathrm{H}^k f + \mathrm{H}^k g)\ .
\end{array}$$

Da $\bar{h}^k_X$ epimorph ist, folgt

$$\mathrm{H}^k(f+g) \;=\; \mathrm{H}^k f + \mathrm{H}^k g\ .$$

Zusatz (N. Rau). Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor, der für $X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und $u, v : X \to X'$ die Gleichung $F(u+v) = Fu + Fv$ erfüllt, dann ist $F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$. Denn dann ist für $X,\ X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ die Abbildung ${}_{\mathcal{A}}(X, X') \to {}_{\mathcal{B}}(FX, FX')$, $u \mapsto Fu$ ein Gruppenmorphismus, weswegen $F0_{X,X'} = 0_{FX,FX'}$ gilt. Insbesondere wird

$$\mathrm{id}_{F0_{\mathcal{A}}} \;=\; F\,\mathrm{id}_{0_{\mathcal{A}}} \;=\; F0_{0_{\mathcal{A}},0_{\mathcal{A}}} \;=\; 0_{F0_{\mathcal{A}},F0_{\mathcal{A}}}\ .$$

Also sind die Morphismen $F0_{\mathcal{A}} \to 0_{\mathcal{B}}$ und $F0_{\mathcal{A}} \leftarrow 0_{\mathcal{B}}$ sich beidseitig invertierende Isomorphismen.

Hausaufgabe 38 (A55) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Man zeige: Das Bild von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwindet genau dann, wenn es ein Tupel $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ von Morphismen in $\mathcal{A}$ gibt mit $h^i d_Y^{i-1} + d_X^i h^{i+1} = f^i$ für $i \in \mathbb{Z}$. Diesenfalls heißt $(h^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine *Homotopie*.

Lösung. Wir schreiben kurz $d := d^i_X$ und auch $d := d^i_Y$ für $i \in \mathbb{Z}$, unter Mißbrauch von Notation.

Gebe es ein Tupel $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ von Morphismen in $\mathcal{A}$ so, daß $h^i d + dh^{i-1} \;=\; f^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann komponieren die beiden Morphismen von Komplexen

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[d, "c_X"] \\ C_X \arrow[d] \\ Y \end{tikzcd}\right) := \left(\begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] & X^{i-1}\oplus X^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}h^{i-1}d\\h^i\end{smallmatrix}\right)"] & X^i\oplus X^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}h^{i}d\\h^{i+1}\end{smallmatrix}\right)"] & X^{i+1}\oplus X^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}h^{i+1}d\\h^{i+2}\end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}\right)$$

zu f, mithin faktorisiert f über einen split azyklischen Komplex und verschwindet also in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Sei umgekehrt $f = 0$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, i.e. faktorisiere f über einen split azyklischen Komplex, o.E. wie folgt.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(u^{i-1}\ v^{i-1})"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(u^{i}\ v^{i})"] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(u^{i+1}\ v^{i+1})"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] & T^{i-1}\oplus T^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}a^{i-1}\\b^{i-1}\end{smallmatrix}\right)"] & T^i\oplus T^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}a^{i}\\b^{i}\end{smallmatrix}\right)"] & T^{i+1}\oplus T^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}a^{i+1}\\b^{i+1}\end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sei also $f^i = u^i a^i + v^i b^i$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Aus den kommutativen Vierecken des oberen Komplexmorphismus entnehmen wir, daß $v^i = du^{i+1}$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Aus den kommutativen Vierecken des unteren Komplexmorphismus entnehmen wir, daß $b^i d = a^{i+1}$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Setze $h^i := u^i b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{Z}$. Es ergibt sich

$$f^i \;=\; u^i a^i + v^i b^i \;=\; u^i b^{i-1} d + du^{i+1} b^i \;=\; h^i d + dh^{i+1}\ .$$

Hausaufgabe 39 Sei $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/27$-Mod. Sei $\mathcal{B} = \mathbb{Z}/3$-Mod. Seien

$$\begin{array}{rcl} X & := & (\ldots \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \ldots) \\ Y & := & (\cdots \to 0 \to \underbrace{\mathbb{Z}/27}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \to 0 \to \ldots) \end{array}$$

in $\mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A})) \;=\; \mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{A}))$.

(1) Man bestimme $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{h^k_X} \tilde{\mathrm{Z}}^k X$ und daraus $\mathrm{H}^k X$ für $k \in \mathbb{Z}$. Man folgere: X ist azyklisch.

(2) Sei $F := (\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} -) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ist FX azyklisch? Ist FX isomorph zu 0 in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$?
Ist X split azyklisch?

(3) Man bestimme $\mathrm{H}^k Y$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Man finde ein $Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A}))$ und einen Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ungleich 0 von X nach Z.

Lösung.
Zu (1).
Es ist $\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9$ ein Kern des der Stelle k nachfolgenden Differentials $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9$.
Es ist $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ ein Cokern des der Stelle k vorangehenden Differentials $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9$.
Mit diesen Wahlen von Kern und Cokern erhalten wir als Kompositum

$$(\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{h^k_X} \tilde{\mathrm{Z}}^k X) \;=\; (\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3\cdot 1} \mathbb{Z}/3) \;=\; (\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3)$$

Das Bild der Nullabbildung ist der Nullmodul, und folglich ist $\mathrm{H}^k X = 0$.
Da dies für jedes $k \in \mathbb{Z}$ zutrifft, ist X azyklisch.
Zu (2). Es ist

$$\begin{array}{rcl} FX & = & (\ldots \xrightarrow{\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} 3} \mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} 3} \mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} 3} \mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} 3} \mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{\mathbb{Z}/3 \underset{\mathbb{Z}/27}{\otimes} 3} \ldots) \\ & \simeq & (\ldots \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \ldots) \\ & = & (\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{0} \ldots)\,. \end{array}$$

Folglich ist $\mathrm{H}^k FX \simeq \mathbb{Z}/3$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Folglich ist FX nicht azyklisch, insbesondere nicht split azyklisch.
Da F additiv ist, würde aus X split azyklisch folgen, daß FX split azyklisch ist. Also ist X nicht split azyklisch.
Zu (3). Es ist $\mathrm{H}^k Y = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1, 2\}$.
Es ist $\mathrm{H}^0 Y = \mathrm{Z}^0 Y \simeq \mathbb{Z}/9$.
Es ist $\mathrm{H}^2 Y = \tilde{\mathrm{Z}}^0 Y \simeq \mathbb{Z}/9$.
Wir berechnen noch $\mathrm{H}^1 Y$. Es ist $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27$ ein Kern des Differentials $\mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27$. Es ist $\mathbb{Z}/27 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/9$ ein Cokern des Differentials $\mathbb{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27$. Mit diesen Wahlen von Kern und Cokern erhalten wir als Kompositum

$$(\mathrm{Z}^1 Y \xrightarrow{h^k_Y} \tilde{\mathrm{Z}}^1 Y) \;=\; (\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3\cdot 1} \mathbb{Z}/9) \;=\; (\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9)\,.$$

Das Bild dieser injektiven $\mathbb{Z}/27$-linearen Abbildung ist isomorph zu $\mathbb{Z}/3$, und folglich ist $\mathrm{H}^1 Y \simeq \mathbb{Z}/3$.
Zu (4). Wir behaupten, daß der folgende Komplexmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ nicht verschwindet. Der untere Komplex sei dabei das gefragte Z.

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbb{Z}/3}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Wir verwenden Hausaufgabe 38, um zu zeigen, daß dieser Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ nicht verschwindet.
Annahme, er verschwindet in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Dann können wir eine Homotopie $(h^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ wählen, die diesen Morphismus liefert. Für $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}$ ist $h^k = 0$. Sei $a := h^1 : \mathbb{Z}/9 \to \mathbb{Z}/3$. Es gilt

$$1 \;=\; 3\cdot h^1 + h^0\cdot 0 \;=\; 3a\,,$$

als Morphismus von $\mathbb{Z}/9$ nach $\mathbb{Z}/3$. Das geht nicht. *Widerspruch.*

Hausaufgabe 40 (A59) Sei $(X',X,X'') \xrightarrow{(f',f,f'')} (Y',Y,Y'')$ ein Morphismus von der rechtsexakten Sequenz (X',X,X'') zur linksexakten Sequenz (Y',Y,Y'') wie in Lemma 136. Wir verwenden die dortigen Bezeichnungen.

Sei $(\tilde{X}',\tilde{X},\tilde{X}'') \xrightarrow{(\tilde{f}',\tilde{f},\tilde{f}'')} (\tilde{Y}',\tilde{Y},\tilde{Y}'')$ entsprechend ein Morphismus von der rechtsexakten Sequenz $(\tilde{X}',\tilde{X},\tilde{X}'')$ zur linksexakten Sequenz $(\tilde{Y}',\tilde{Y},\tilde{Y}'')$, mit entsprechenden Bezeichnungen.

Sei folgendes kommutatives Viereck von Sequenzen gegeben.

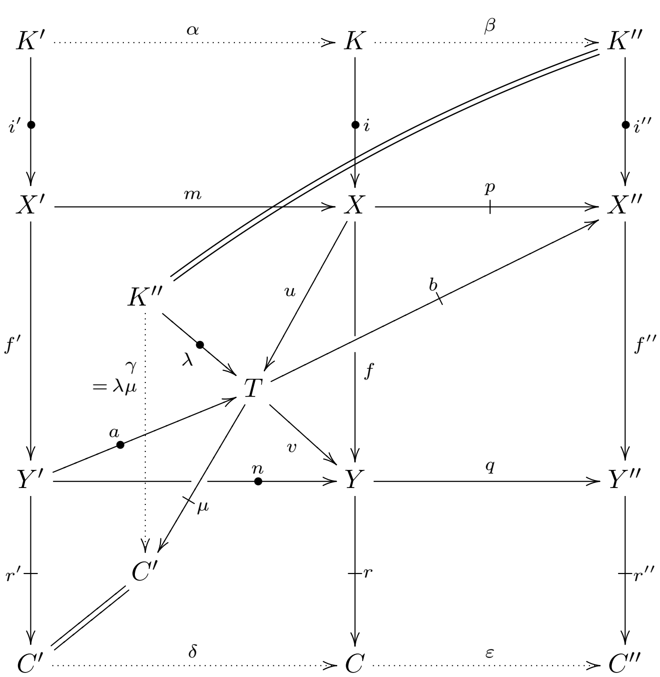
$$\begin{tikzcd}
(X',X,X'') \arrow[r, "{(f',f,f'')}"] \arrow[d, "{(x',x,x'')}"'] & (Y',Y,Y'') \arrow[d, "{(y',y,y'')}"] \\
(\tilde{X}',\tilde{X},\tilde{X}'') \arrow[r, "{(\tilde{f}',\tilde{f},\tilde{f}'')}"'] & (\tilde{Y}',\tilde{Y},\tilde{Y}'')
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 124.(2) gibt uns Morphismen k' mit $k'\tilde{i}' = i'x'$, und k mit $k\tilde{i} = ix$, und k'' mit $k''\tilde{i}'' = i''x''$, und c' mit $r'c' = y'\tilde{r}'$, und c mit $rc = y\tilde{r}$, und c'' mit $r''c'' = y''\tilde{r}''$.

Man zeige die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k'"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"'] & K'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "k''"'] & C' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "c'"] & C \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "c"] & C'' \arrow[d, "c''"] \\
\tilde{K}' \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{K} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \tilde{C}' \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & \tilde{C} \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & \tilde{C}''\,.
\end{tikzcd}$$

Lösung. Wir sind in folgender Situation, wobei das entsprechende Diagramm für $(\tilde{f}',\tilde{f},\tilde{f}'')$ und der Morphismus zwischen dem zu (f',f,f'') und dem zu $(\tilde{f}',\tilde{f},\tilde{f}'')$ gehörenden Diagramm gedanklich ergänzt werden muß.



Es wird $\alpha k\tilde{i} = \alpha i x = i' m x = i' x' \tilde{m} = k' \tilde{i}' \tilde{m} = k' \tilde{\alpha} \tilde{i}$, also $\alpha k = k' \tilde{\alpha}$.

Es wird $\beta k'' \tilde{i}'' = \beta i'' x'' = i p x'' = i x \tilde{p} = k \tilde{i} \tilde{p} = k \tilde{\beta} \tilde{i}''$, also $\beta k'' = k \tilde{\beta}$.

Dual ist $\delta c = c' \tilde{\delta}$ und $\varepsilon c'' = c \tilde{\varepsilon}$.

Es bleibt $\gamma c' \overset{!}{=} k'' \tilde{\gamma}$ zu zeigen.

Es ist $m(x\tilde{u}) = x' \tilde{m} \tilde{u} = x' \tilde{f}' \tilde{a} = f'(y' \tilde{a})$. Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, gibt es ein t mit $ut = x\tilde{u}$ und $at = y'\tilde{a}$.

Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, ist $\left(\begin{smallmatrix} u \\ -a \end{smallmatrix}\right)$ epimorph; cf. Lemma 134°.

Es ist $t\tilde{v} = vy$, da zum einen $a(t\tilde{v}) = y' \tilde{a} \tilde{v} = y' \tilde{n} = ny = a(vy)$ und zum anderen $u(t\tilde{v}) = x \tilde{u} \tilde{v} = x \tilde{f} = fy = u(vy)$.

Es ist $t\tilde{b} = bx''$, da zum einen $a(t\tilde{b}) = y' \tilde{a} \tilde{b} = 0 = a(bx'')$ und zum anderen $u(t\tilde{b}) = x \tilde{u} \tilde{b} = x \tilde{p} = p x'' = u(bx'')$.

Somit ist die Situation selbstdual; man hätte zur Konstruktion von t auch verwenden können, daß $(\tilde{T}, \tilde{X}'', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$ ein Pullback ist.

Wir wollen nun zeigen, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
K'' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "k''"'] & T \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "t"] & C' \arrow[d, "c'"] \\
\tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] & \tilde{T} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & \tilde{C}'
\end{tikzcd}$$

Dank Dualität genügt es, das rechte Viereck als kommutativ nachzuweisen.

In der Tat ist $\mu c' = t\tilde{\mu}$, da zum einen $u(\mu c') = 0 = x \tilde{u} \tilde{\mu} = u(t\tilde{\mu})$ und zum anderen $a(\mu c') = r' c' = y' \tilde{r}' = y' \tilde{a} \tilde{\mu} = a(t\tilde{\mu})$.

Damit ist das zur Aufgabe gestellte Diagramm als kommutativ nachgewiesen.