Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 4

Hausaufgabe 13 (A11, A18, A19) Sei K ein Körper.

(1) Sei $n \geqslant 2$. Man zeige: Der Kern der Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $\mathrm{P}^{n-1}(K)$ ist $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(K)) = K^\times \mathrm{E}_n$.

(2) Sei $n \geqslant 2$. Man zeige: Es ist $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(K)) = K^\times \mathrm{E}_n \cap \mathrm{SL}_n(K)$.

(3) Man zeige: Es ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{S}_{\mathrm{P}^1(\mathbb{F}_2)}$. Ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ eine einfache Gruppe?

Hausaufgabe 14 (A18) Sei F ein Körper. Man zeige.

(1) Sei $n \geqslant 1$. Es ist $\mathrm{SL}_n(F) = \langle\, \mathrm{E}_n + \lambda\, \mathrm{e}_{i,j} \;:\; (i,j) \in [1,n]^{\times 2, \neq},\ \lambda \in F \,\rangle$.

(2) Sei $n \geqslant 3$. Es ist $\mathrm{SL}_n(F)^{(1)} = \mathrm{SL}_n(F)$.

(3) Sei $|F| \geqslant 4$. Es ist $\mathrm{SL}_2(F)^{(1)} = \mathrm{SL}_2(F)$.

(4) Sei $n \geqslant 2$. Es ist

$$A \;:=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \mathrm{E}_{n-1} \end{smallmatrix}\right) \;:=\; \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & \mathrm{E}_{n-1} \end{smallmatrix}\right) \;:\; y \in F^{1\times(n-1)} \right\} \;\trianglelefteqslant\; \mathrm{C}_{\mathrm{SL}_n(F)}(\overline{\mathrm{e}_1}) \;.$$

Es ist ${}^{G}\langle\!\langle\, A \,\rangle\!\rangle = \langle \bigcup_{g \in \mathrm{SL}_n(F)} {}^{g}\!A \rangle = \mathrm{SL}_n(F)$.

Hausaufgabe 15 (A20)
Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung 60. Man zeige: Es ist G isomorph zu A_5 .
(Hinweis: $\mathrm{Syl}_p(G)$ als G-Menge. Fall: $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| = 15$. Wieso gibt es dann ein $x \in G \smallsetminus \{1\}$, das im Schnitt zweier 2-Sylowgruppen liegt? Warum ist dann 4 ein echter Teiler von $|\mathrm{C}_G(x)|$? Betrachte dann $G \to \mathrm{S}_{(\,{}^{G}x)}$.)

Hausaufgabe 16
Sei $\{x, y\}$ eine zweielementige Menge.
Sei $F := \mathrm{F}(\{x, y\})$ die freie Gruppe auf $\{x, y\}$.

(1) Man konstruiere einen Automorphismus φ von F mit $\varphi \neq \mathrm{id}_F$, aber $\varphi^2 = \mathrm{id}_F$.

(2) Man konstruiere zwei Automorphismen φ, ψ von F mit $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.

(3) Man zeige: $\mathrm{Z}(F) = 1$, d.h. das Zentrum ist trivial.