Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 3

Hausaufgabe 9

(1) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 83 ?

(2) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 82 ?

(3) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 81 ?

(4) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 80 ?

Hausaufgabe 10 (A13) Seien G und H Gruppen. Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus. Sei $G^{(1)} := [G,G] := \langle\, [g,\tilde{g}] \,:\, g,\, \tilde{g} \in G \,\rangle$ die Kommutatoruntergruppe von G. Man zeige.

(1) Sei f surjektiv. Es ist $f(G^{(1)}) = H^{(1)}$.

(2) Es ist $G^{(1)} \trianglelefteq G$ und $G/G^{(1)}$ abelsch.

(3) Sei $G \xrightarrow{r} G/G^{(1)}$, $g \mapsto gG^{(1)}$. Sei H abelsch.
Es gibt genau einen Gruppenmorphismus $\bar{f} : G/G^{(1)} \to H$ mit $\bar{f} \circ r = f$.

(4) Sei $N \trianglelefteq G$. Genau dann ist G/N abelsch, wenn $G^{(1)} \leqslant N$ liegt.

Hausaufgabe 11 (A14) Sei $G_0 := \langle\, (1,2)(3,4)\,,\ (1,2)(3,5)\,,\ (1,3)(4,5)\,\rangle \leqslant \mathrm{A}_5\,$.
Wir betrachten die G_0-Menge $M = [1,5]\,$.

(1) Man bestimme Erzeuger für $G_1 := \mathrm{C}_{G_0}(1)$.

(2) Man bestimme Erzeuger für $G_2 := \mathrm{C}_{G_1}(2)$.

(3) Man zeige $G_0 = \mathrm{A}_5$ unter Verwendung von (1) und (2).

Hausaufgabe 12 (A17) Sei G eine Gruppe. Sei $K \trianglelefteq G$.
Sei $r : G \to G/K$, $g \mapsto gK$. Man zeige.

(1) Wir haben die inklusionserhaltende Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \{\, U \subseteq G \,:\, K \leqslant U \leqslant G \,\} & \to & \{\, V \subseteq G/K \,:\, V \leqslant G/K \,\} \\ U & \mapsto & r(U) \\ r^{-1}(V) & \leftarrow\!\shortmid & V\ . \end{array}$$

(2) Seien U und U' aus der linken Seite von (1) mit $U \trianglelefteq U'$ gegeben.
Dann ist auch $r(U) \trianglelefteq r(U')$ und $U'/U \xrightarrow{\sim} r(U')/r(U)$, $u'U \mapsto r(u')\,r(U)$.

(3) Die Bijektion aus (1) schränkt ein zu einer Bijektion von $\{\, U \subseteq G \,:\, K \leqslant U \trianglelefteq G \,\}$ nach $\{\, V \subseteq G/K \,:\, V \trianglelefteq G/K \,\}$.