Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 2

Hausaufgabe 5 Sei $G := \langle (1,4), (1,2,3)(4,5,6) \rangle \leqslant \mathrm{S}_7$.
Wir betrachten die G-Menge $M := [1,7]$.

(1) Man berechne die Bahn $G \cdot 1$.

(2) Man berechne Erzeuger von $\mathrm{C}_G(1)$. Ist $\mathrm{C}_G(1)$ abelsch?

(3) Man verwende das Bahnenlemma und (1), (2), um $|G|$ zu berechnen.

(4) Ist $G \cdot 1$ eine primitive G-Menge? Kann man einen Block B mit $1 < |B| < |G \cdot 1|$ angeben?

Hausaufgabe 6 (A7, A4) Man zeige.

(1) Sei p prim. Sei P eine *p-Gruppe*, i.e. sei P eine endliche Gruppe und p der einzige Primteiler von $|P|$. Sei M eine endliche P-Menge. Dann ist $|\mathrm{Fix}_P(M)| \equiv_p |M|$.

(2) Sei G eine endliche Gruppe. Sei p ein Primteiler von $|G|$.
Dann gibt es in G ein Element von Ordnung p.
(Hinweis: Es ist $M := \{\, (g_i)_i \in G^{\times p} \;:\; g_1 g_2 \cdot \ldots \cdot g_p = 1 \,\}$ eine C_p-Menge.
Wieso ist $|\mathrm{Fix}_{\mathrm{C}_p}(M)| \geqslant p\,$?)

(3) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Sei $\mathrm{N}_G(U) := \{\, g \in G \;:\; {}^g U = U \,\}$ der *Normalisator* von U in G. Dann ist $\mathrm{C}_G(U) \trianglelefteqslant \mathrm{N}_G(U)$ und $U \trianglelefteqslant \mathrm{N}_G(U)$.

Hausaufgabe 7 (A12) Sei G eine Gruppe. Seien $U,\, V \leqslant G$. Man zeige.

(1) Seien U und V endlich. Es ist $|UV| = |U| \cdot |V| / |U \cap V|$.

(2) Ist $U \leqslant \mathrm{N}_G(V)$, dann ist $V \trianglelefteqslant UV = VU \leqslant G$ und $U \cap V \trianglelefteqslant U$
und $U/(U \cap V) \xrightarrow{\sim} (UV)/V$, $u(U \cap V) \mapsto uV$ ein Gruppenisomorphismus.

(3) Sind $U,\, V \trianglelefteqslant G$, dann ist $UV \trianglelefteqslant G$.

(4) Sei $N \trianglelefteqslant G$. Sei $N \trianglelefteqslant H \trianglelefteqslant G$. Dann haben wir den Isomorphismus
$G/H \xrightarrow{\sim} (G/N)/(H/N)$, $gH \mapsto (gN)(H/N)$.

Hausaufgabe 8 (A5) Sei $n \geqslant 3$. Wir betrachten die A_n-Menge $[1,n]$.

(1) Man weise $[1,n]$ als $(n-2)$-fach transitive, aber nicht $(n-1)$-fach transitive A_n-Menge nach.

(2) Ist $[1,n]$ eine primitive A_n-Menge?