Erinnerung:

Eine Menge G, zusammen mit einer Abbildung $G \times G \xrightarrow{(\cdot)} G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, heißt Gruppe, falls

- $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ für $g, h, k \in G$
- $\exists \; 1 = 1_G \in G$ mit $1 \cdot g = g$ und $g \cdot 1 = g$ für $g \in G$

Es liegt 1_G eindeutig fest.

- $\forall g \in G \; \exists \; g^- = g^{-1} \in G$ mit

$$g \cdot g^- = 1_G$$

$$g^- \cdot g = 1_G$$

Für $g \in G$ liegt g^- eindeutig fest.

Beispiele:
- Symmetrische Gruppe S_Ω auf einer Menge Ω ; auch: $[1,n] = \{1, \dots, n\}$
  - z.B. $S_{\{1, \dots, n\}} =: S_n$ für $n \geq 0$
- $GL_n(K)$ für Körper K und $n \geq 0$
- Untergruppen davon

G: Gruppe

Ω: Menge

symmetrische Gruppe auf Ω

- $\alpha : G \longrightarrow S_\Omega$ Gruppenhomomorphismus

$\rightsquigarrow \Omega = (\Omega, \alpha)$ ist G-Menge

$$g \cdot \omega := (\alpha(g))(\omega)$$

- Zugang via Multiplikationsabbildung:

Sei
$$G \times \Omega \longrightarrow \Omega$$
$$(g, \omega) \longmapsto g \cdot \omega$$

mit $\begin{cases} 1 \cdot \omega = \omega & \text{für } \omega \in \Omega \\ (g \cdot h) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega) & \text{für } g, h \in G,\ \omega \in \Omega \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha(g))(\omega) := g \cdot \omega$

$\Rightarrow \Omega = (\Omega, \alpha)$ ist G-Menge

Operation α injektiv

Bsp

- $U \le S_n \Rightarrow [1, n]$ ist treue U-Menge mit $u \cdot k = u(k)$

symmetrische Gruppe, $n \geq 0$

- $U \le G$

$\Rightarrow G/U = \{hU : h \in G\}$ ist G-Menge mit $g \cdot (hU) := (gh)U$ für $g \in G$ und $h \in G$

G : Gruppe

M, N : G-Mengen

- $M \xrightarrow{f} N$ heißt **G-Abbildung**,

  falls $f(g.m) = g.f(m)$ für $g \in G$, $m \in M$

- Ist die G-Abbildung f bijektiv, so heißt sie **G-Bijektion** oder **Isomorphismus von G-Mengen**.

- $m \in M \Rightarrow G.m = \{g.m : g \in G\} \subseteq M$ heißt **Bahn** von m

- Disjunkte Zerlegung: $M = \bigsqcup_{i \in [1,k]} G m_i$, wobei $\{m_1, \dots, m_k\}$ gewählte Repräsentantenmenge der Bahnen

---

$k \geq 0$

- $M^{\times k} = \{(m_i)_{i \in [1,k]} : m_i \in M \text{ für } i \in [1,k]\}$ ist G-Menge via $g.(m_i)_i := (g.m_i)_i$

- $M^{\times k, \neq} = \{(m_i)_i \in M^{\times k} : m_i \neq m_j \text{ falls } i \neq j\}$ ist G-Teilmenge in $M^{\times k}$

G : Gruppe

Ω : G-Menge

Ω heißt **transitiv**, wenn Ω aus genau einer Bahn besteht. D.h. wenn $\Omega = Gm$ für $m \in \Omega$.

$k \geq 0$

Ω heißt **k-fach transitiv**, wenn $\Omega^{\times k, \neq}$ transitiv ist.

Bsp: Die S_n-Menge $[1,n]$ ist n-fach transitiv.

Bahnenlemma: $m \in \Omega$

$$\underbrace{C_G(m)}_{\text{Zentralisator}} = \{ g \in G : g \cdot m = m \}$$

G-Bijektion:
$$G / C_G(m) \xrightarrow{\sim} G \cdot m$$
$$g C_G(m) \longmapsto g \cdot m$$

Bem. 22 Ω: transitive G-Menge, T : G-Menge

$\Omega \xrightarrow{f} T$ surj. G-Abbildung

$m \in \Omega$

(1) $C_G(m) \leq C_G(f(m)) \leq G$

(2) $C_G(m) = C_G(f(m)) \iff f$ bij.

(3) $C_G(f(m)) = G \iff T$ trivial

noch! zz!

G : Gruppe

Π : transitive G-Menge

- Sei Π nichttrivial.

Es heißt Π primitiv, falls

$$\Pi \xrightarrow[\substack{\text{surj}\\ G\text{-Abb.}}]{f} T \implies f \text{ bijektiv oder } T \text{ trivial}$$

- $B \subseteq \Pi$ heißt Block, falls $gB = B$ oder $gB \cap B = \emptyset$ für $g \in G$.

Lemma 28

Π transitiv und nichttrivial

Äquivalent sind:

(1) Π ist primitiv

(2) Es gibt auf Π keine G-Äquivalenzrelation, die weder diskret noch verklumpt ist

Ä-Klassen einelementig

nur eine Ä-Klasse

(3) Es gibt in Π keinen Block B mit $|B| > 1$ und $B \subset \Pi$

(4) $\exists\, m \in \Pi$ mit: $C_G(m) \overset{\max}{<} G$

(5) $\forall\, m \in \Pi$ ist: $C_G(m) \overset{\max}{<} G$

Bew. $\quad (4) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (1) \overset{!}{\Leftrightarrow} (2) \overset{!}{\Leftrightarrow} (3)$

G: endlich erzeugte Gruppe

$S \subseteq G$: endl. Teilmenge mit $G = \langle S \rangle$

$S^{\pm} := S \cup \{ s^{-} : s \in S, |\langle s \rangle| = \infty \}$

↑ Falls G endlich, dann $S^{\pm} = S$

Jedes Element von $G = \langle S \rangle$ kann also als Produkt von Elementen aus $S^{\pm}$ geschrieben werden.

Π : G-Menge

$m \in \Pi$: Element mit $G.m = \{ g.m : g \in G \}$ endlich. ← z.B.: Π endlich, $m \in \Pi$ beliebig

Wollen: $G.m = \{ g.m : \underline{g \in G} \}$

und

$C_G(m) = \{ \underline{g \in G} : g.m = m \}$

sparsam berechnen

(Erzeugerliste für $C_G(m)$)

7

Bsp:

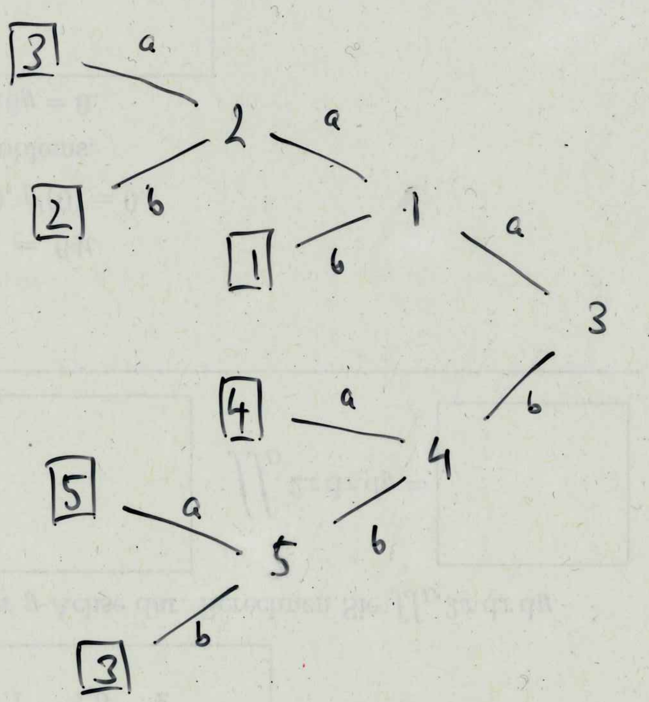
$$G = \langle \underbrace{(1,2,3)}_{=:a}, \underbrace{(3,4,5)}_{=:b} \rangle \leq S_6 \qquad \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \omega = 3$$

Baum von rechts nach links

① Nicht in Kästen:

$G \cdot 3 = \{1,2,3,4,5\}$

Kasten, falls schon vorher aufgetreten



② In Kästen:

$\boxed{1}$: $\tau(b \circ a)^- \circ (b \circ a)$
$= a^- \circ b \circ a = (2,4,5)$

$\boxed{4}$: $\tau(a \circ b)^- \circ (a \circ b)$
$= b^- \circ a \circ b = (1,2,5)$

$\boxed{3}$: $\tau(a^3)^- \circ a^3$
$= id^- \circ a^3 = id$

$\boxed{2}$: $\tau(b \circ a^2)^- \circ b \circ a^2$
$= (a^2)^- \circ b \circ a^2 = (1,4,5)$

$\boxed{5}$: $\tau(a \circ b^2)^- \circ a \circ b^2$
$= (b^2)^- \circ a \circ b^2 = (1,2,4)$

$\boxed{3}$: $\tau(b^3)^- \circ b^3$
$= id^- \circ b^3 = id$

⊛ $^{(1,2,5)}(2,4,5) = (5,4,1) = (1,4,5)$

$^{(1,5,2)}(2,4,5) = (1,4,2) = (1,2,4)$

$\leadsto (1,4,5), (1,2,4)$ nicht benötigt

$\Rightarrow C_G(3) = \langle (2,4,5), (1,2,5), (1,4,5), (1,2,4) \rangle$

$\overset{⊛}{=} \langle (2,4,5), (1,2,5) \rangle \Rightarrow |G| = \underbrace{|C_G(3)|}_{12} \cdot \underbrace{|G \cdot 3|}_{5} = 60$

extra Rechnung → 12   5 ← s.o.