

Lösung 3

Hausaufgabe 9

- (1) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 83?
- (2) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 82?
- (3) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 81?
- (4) Gibt es eine einfache Gruppe von Ordnung 80?

Lösung.

Ad (1). Ja. Die zyklische Gruppe C_{83} ist einfach. Denn wegen 83 prim kann keine Untergruppe $1 \neq U < C_{83}$ existieren, was wegen C_{83} abelsch gleichbedeutend ist mit der Einfachheit von C_{83} .

Ad (2). Nein. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 82$. Es ist $|\text{Syl}_{41}(G)| \equiv_{41} 1$ und $|\text{Syl}_{41}(G)|$ ein Teiler von $\frac{82}{82[41]} = 2$. Also ist $|\text{Syl}_{41}(G)| = 1$. Somit ist die einzige 41-Sylowuntergruppe ein Normalteiler in G von Ordnung 41. Folglich ist G nicht einfach.

Ad (3). Nein. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 81$.

Fall G abelsch. Dann gibt es ein Element x von Ordnung 3 in G . Es ist $1 \neq \langle x \rangle \triangleleft G$. Folglich ist diesenfalls G nicht einfach.

Fall G nichtabelsch. Es ist $Z(G) < G$. Um zu zeigen, daß G nicht einfach ist, genügt es also zu zeigen, daß $Z(G) \neq 1$ ist.

Es operiert G via Konjugation auf G . Es ist $1 \leq |Z(G)| \equiv_3 |G| = 81$; cf. Hausaufgabe 6.(1). Folglich ist $|Z(G)| \geq 3$ und damit tatsächlich $Z(G) \neq 1$.

Ad (4). Nein. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 80$. *Annahme*, es ist G einfach.

Es ist $|\text{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und $|\text{Syl}_5(G)|$ ein Teiler von $\frac{80}{80[5]} = 16$. Also ist $|\text{Syl}_5(G)| \in \{1, 16\}$. Wegen G einfach ist $|\text{Syl}_5(G)| = 16$.

Es ist $|\text{Syl}_2(G)| \equiv_2 1$ und $|\text{Syl}_2(G)|$ ein Teiler von $\frac{80}{80[2]} = 5$. Also ist $|\text{Syl}_2(G)| \in \{1, 5\}$. Wegen G einfach ist $|\text{Syl}_2(G)| = 5$.

Da $|\text{Syl}_5(G)| = 16$ und da der Schnitt je zweier 5-Sylowgruppen gleich 1 ist, haben wir in G zusammen $(5 - 1) \cdot 16 = 64$ Elemente der Ordnung 5.

Da $|\text{Syl}_2(G)| > 1$, haben wir in G mehr als 16 Elemente, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist.

Insgesamt haben wir in G mehr als $64 + 16 = 80$ Elemente. Wir haben einen *Widerspruch* zu $|G| = 80$.

Hausaufgabe 10 (A13) Seien G und H Gruppen. Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus. Sei $G^{(1)} := [G, G] := \langle [g, \tilde{g}] : g, \tilde{g} \in G \rangle$ die Kommutatoruntergruppe von G . Man zeige.

- (1) Sei f surjektiv. Es ist $f(G^{(1)}) = H^{(1)}$.
- (2) Es ist $G^{(1)} \trianglelefteq G$ und $G/G^{(1)}$ abelsch.
- (3) Sei $G \xrightarrow{r} G/G^{(1)}$, $g \mapsto gG^{(1)}$. Sei H abelsch.
Es gibt genau einen Gruppenmorphismus $\bar{f} : G/G^{(1)} \rightarrow H$ mit $\bar{f} \circ r = f$.
- (4) Sei $N \trianglelefteq G$. Genau dann ist G/N abelsch, wenn $G^{(1)} \leq N$ liegt.

Lösung.

Ad (1). Da $f([g, \tilde{g}]) = [f(g), f(\tilde{g})] \in H^{(1)}$ ist für $g, \tilde{g} \in G$ und da $G^{(1)} = \langle [g, \tilde{g}] : g, \tilde{g} \in G \rangle$ ist, ist $f(G^{(1)}) \leq H^{(1)}$.

Da $[h, \tilde{h}] = [f(g), f(\tilde{g})] = f([g, \tilde{g}])$ ist für $h, \tilde{h} \in H$ und $g, \tilde{g} \in G$ mit $f(g) = h$ und $f(\tilde{g}) = \tilde{h}$ und da $H^{(1)} = \langle [h, \tilde{h}] : h, \tilde{h} \in H \rangle$ ist, ist $f(G^{(1)}) \geq H^{(1)}$.

Die Elemente nicht in Kästchen geben die Bahn $G_0 \cdot 1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

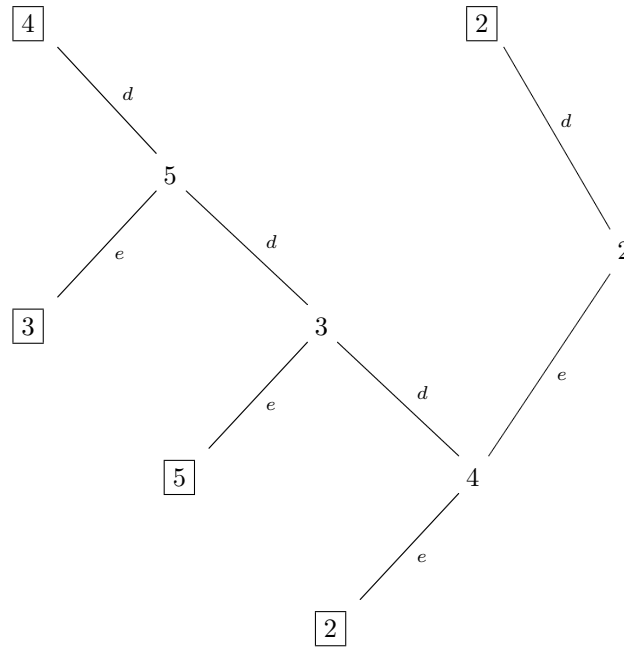
Die Elemente in Kästchen liefern folgende Erzeuger von $C_{G_0}(1)$.

$b \cdot 1$	$=$	$a \cdot 1$	$=$	2	$\Rightarrow$	Erzeuger	$a^- b = (3, 5, 4)$
$a^2 \cdot 1$	$=$	$\text{id} \cdot 1$	$=$	1	$\Rightarrow$	Erzeuger	$\text{id}^- a^2 = \text{id}$
$ba \cdot 1$	$=$	$\text{id} \cdot 1$	$=$	1	$\Rightarrow$	Erzeuger	$\text{id}^- ba = (3, 4, 5)$
$ca \cdot 1$	$=$	$a \cdot 1$	$=$	2	$\Rightarrow$	Erzeuger	$a^- ca = (2, 4)(3, 5)$
$c^2 \cdot 1$	$=$	$\text{id} \cdot 1$	$=$	1	$\Rightarrow$	Erzeuger	$\text{id}^- c^2 = \text{id}$
$a^2 c \cdot 1$	$=$	$c \cdot 1$	$=$	3	$\Rightarrow$	Erzeuger	$c^- a^2 c = \text{id}$
$bac \cdot 1$	$=$	$ac \cdot 1$	$=$	4	$\Rightarrow$	Erzeuger	$c^- a^- bac = (2, 3)(4, 5)$
$cac \cdot 1$	$=$	$bc \cdot 1$	$=$	5	$\Rightarrow$	Erzeuger	$c^- b^- cac = (2, 4, 5)$
$abc \cdot 1$	$=$	$bc \cdot 1$	$=$	5	$\Rightarrow$	Erzeuger	$c^- b^- abc = (2, 3)(4, 5)$
$b^2 c \cdot 1$	$=$	$c \cdot 1$	$=$	3	$\Rightarrow$	Erzeuger	$c^- b^2 c = \text{id}$
$cbc \cdot 1$	$=$	$ac \cdot 1$	$=$	4	$\Rightarrow$	Erzeuger	$c^- a^- cbc = (2, 5, 4)$

Wir schreiben $d := (3, 5, 4)$ und $e := (2, 4)(3, 5)$.

Es wird ${}^d e = (2, 3)(4, 5) =: g$, ${}^g d = (2, 4, 5)$. Also ist $G_1 = C_{G_0}(1) = \langle d, e \rangle$.

Ad (2). Zur Berechnung von Erzeugern von $C_{G_1}(2)$ erstellen wir folgenden Baum von rechts nach links.



Die Elemente nicht in Kästchen geben die Bahn $G_1 \cdot 2 = \{2, 3, 4, 5\}$.

Die Elemente in Kästchen liefern folgende Erzeuger von $C_{G_1}(2)$.

$d \cdot 2$	$=$	$\text{id} \cdot 2$	$=$	2	$\Rightarrow$	Erzeuger	$\text{id}^- d = (3, 5, 4)$
$e^2 \cdot 2$	$=$	$\text{id} \cdot 2$	$=$	2	$\Rightarrow$	Erzeuger	$\text{id}^- e^2 = \text{id}$
$ede \cdot 2$	$=$	$d^2 e \cdot 2$	$=$	5	$\Rightarrow$	Erzeuger	$e^- d^{-2} ede = (3, 4, 5)$
$d^3 e \cdot 2$	$=$	$e \cdot 2$	$=$	4	$\Rightarrow$	Erzeuger	$e^- d^3 e = \text{id}$
$ed^2 e \cdot 2$	$=$	$de \cdot 2$	$=$	3	$\Rightarrow$	Erzeuger	$e^- d^- ed^2 e = (3, 5, 4)$

Also ist $G_2 = C_{G_1}(2) = \langle d \rangle = \langle (3, 4, 5) \rangle$.

Ad (3). Zu zeigen ist nur $|G_0| \stackrel{!}{=} 60$. In der Tat wird

$$|G_0| \stackrel{\text{L. 20}}{=} |G_0 \cdot 1| \cdot |C_{G_0}(1)| = 5 \cdot |G_1| \stackrel{\text{L. 20}}{=} 5 \cdot |G_1 \cdot 2| \cdot |C_{G_1}(2)| = 5 \cdot 4 \cdot |\langle (3, 4, 5) \rangle| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Hausaufgabe 12 (A17) Sei G eine Gruppe. Sei $K \trianglelefteq G$.

Sei $r : G \rightarrow G/K$, $g \mapsto gK$. Man zeige.

(1) Wir haben die inklusionserhaltende Bijektion

$$\begin{aligned} \{U \subseteq G : K \leq U \leq G\} &\rightarrow \{V \subseteq G/K : V \leq G/K\} \\ U &\mapsto r(U) \\ r^{-1}(V) &\leftarrow V. \end{aligned}$$

(2) Seien U und U' aus der linken Seite von (1) mit $U \trianglelefteq U'$ gegeben.

Dann ist auch $r(U) \trianglelefteq r(U')$ und $U'/U \xrightarrow{\sim} r(U')/r(U)$, $u'U \mapsto r(u')r(U)$.

(3) Die Bijektion aus (1) schränkt ein zu einer Bijektion von $\{U \subseteq G : K \leq U \trianglelefteq G\}$ nach $\{V \subseteq G/K : V \trianglelefteq G/K\}$.

Lösung.

Ad (1). Wir zeigen die Wohldefiniertheit der beiden angegebenen Abbildungen.

Ist $U \in \{U \subseteq G : K \leq U \leq G\}$, dann ist $r(U) \in \{V \subseteq G/K : V \leq G/K\}$, da das Bild einer Untergruppe unter einem Gruppenmorphismus eine Untergruppe der Zielgruppe ist.

Ist umgekehrt $V \leq G/K$, dann ist zum einen $r^{-1}(V) \leq G$ als Urbild einer Untergruppe. Ferner folgt aus $1 \leq V$, daß $K = r^{-1}(1) \leq r^{-1}(V)$ ist.

Wir müssen zeigen, daß sich die beiden angegebenen Abbildungen gegenseitig invertieren.

Sei $U \in \{U \subseteq G : K \leq U \leq G\}$. Es ist $U \subseteq r^{-1}(r(U))$. Wir haben $U \stackrel{!}{=} r^{-1}(r(U))$ zu zeigen. Sei $g \in G$ mit $r(g) = r(u)$ für ein $u \in U$. Dann ist $r(gu^{-1}) = r(g) \cdot r(u)^{-1} = 1$ und also $gu^{-1} \in K \leq U$. Somit ist auch $g = gu^{-1} \cdot u \in U$.

Sei $V \in \{V \subseteq G/K : V \leq G/K\}$. Da r surjektiv ist, ist $V = r(r^{-1}(V))$.

Ad (2). Seien $U, U' \in \{U \subseteq G : K \leq U \leq G\}$. Sei $U \trianglelefteq U'$.

Wir zeigen $r(U) \trianglelefteq r(U')$. Sei $u \in U$. Sei $u' \in U'$. Da $u'u \in U$, wird auch $r(u')r(u) = r(u'u) \in r(U)$.

Wir zeigen den Gruppenisomorphismus $U'/U \xrightarrow{\sim} r(U')/r(U)$, $u'U \mapsto r(u')r(U)$. Schreibe $\tilde{r} : r(U') \rightarrow r(U')/r(U)$, $r(u') \mapsto r(u')r(U)$ für den Restklassenmorphismus.

Wir haben den surjektiven Gruppenmorphismus $f := \tilde{r} \circ r|_{U'}^{r(U')} : U' \rightarrow r(U')/r(U)$, $u' \mapsto r(u')r(U)$. Da $\text{Kern}(f) = \{u' \in U' : r(u') \in r(U)\} = U' \cap r^{-1}(r(U)) = U' \cap U = U$, induziert f den Gruppenisomorphismus $U'/U \xrightarrow{\sim} r(U')/r(U)$, $u'U \mapsto f(u') = r(u')r(U)$.

Ad (3). Ist $K \leq U \trianglelefteq G$, dann ist auch $r(U) \trianglelefteq r(G) = G/K$ gemäß (2).

Ist umgekehrt $V \trianglelefteq G/K$, dann ist auch $r^{-1}(V) \trianglelefteq G$ als Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenmorphismus. In der Tat wird für $g \in G$ und $x \in r^{-1}(V)$ dann $r(x) \in V$ und also auch $r({}^gx) = r(g)r(x) \in V$, i.e. ${}^gx \in r^{-1}(V)$.

Also schränken beide Abbildungen aus (1) auf die angegebenen Teilmengen ein. Diese Einschränkungen invertieren sich gemäß (1) gegenseitig und sind daher insbesondere bijektiv.