Verfasser: Bernhard Euler

………..….
.

Erwartungswert einer Zufallsgröße – Produktives Üben

Zusammenfassung:

Wie erlernen und entdecken Schülerinnen und Schüler neue Begriffe? Gelingt es durch produktives Üben, den Kalkül, welcher einem neuen Begriff zugrunde liegt, nachhaltig zu verinnerlichen?
Am Beispiel der Begriffe Erwartungswert und Zufallsvariable wurde dies im Rahmen des Unterrichts in einer Klasse 9 des Muster-Gymnasiums untersucht. Den unterrichtlichen Schwerpunkt stellt dabei neben der Einführung der Begriffe Zufallsvariable und Erwartungswert das variationsreiche und produktive Üben dar, mit einer abschließenden Präsentation von selbst produzierten Aufgaben.
In einer ausführlichen Sachanalyse wird zuerst der mathematische Überbau beschrieben und danach der Blick auf den Schulstoff gerichtet. Dabei betrachte ich kurz die Hinweise zum Thema in den Bildungsplänen 2004 und 2016, um danach, neben einer ausführlichen Schulbuchanalyse, den Unterricht mit Bezügen zum erwünschten Kompetenzaufbau kurz vorzustellen. Abschließend wird ein Blick auf die produzierten Schülermaterialien geworfen und Bilanz gezogen.

1. Sachanalyse

1.1 Die Algebra der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alle möglichen Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment eintreten können, sind in der Ergebnismenge Ω zu finden. Wie wir wissen, sind Ereignisse, die es zu betrachten gilt, gleichfalls Mengen, nämlich Teilmengen dieser Ergebnismenge Ω. Mit einer Ergebnismenge und deren (beliebigen) Teilmengen kann man also - und genau das wollen wir - wie mit jedem Mengensystem Vereinigungen, Schnitte und auch komplementäre Mengen (Gegenereignisse) bilden.
Betrachten wir nun ganz allgemein eine Menge Ω und denken uns hinter Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Aus Ω extrahieren wir nun Teilmengen und bilden nun ein Mengensystem $\mathcal{A}$. In $\mathcal{A}$ sind also alle Teilmengen A_i (die Ereignisse) enthalten. Wir möchten nun, einvernehmlich mit den Kolmogorow`schen Axiomen [1], in diesem Mengensystem „rechnen" und dabei die Mengen „messen" können („messen" im Sinne des Bestimmens von Wahrscheinlichkeiten). Es ist also notwendig, auf Ω eine Algebra zu definieren. Die folgende, eher abstrakt anmutende Definition soll nachfolgend im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung griffig erläutert werden.

[1] Die Axiome von Kolmogorow (auch Kolmogoroff oder Kolmogorov, 1903-1987) dürften dem Leser hinreichend bekannt sein und sollen an dieser Stelle nicht weiter erläutert werden.

Definition 1
Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ einer zugrundliegenden Menge Ω heißt **σ-Algebra** (Sigma-Algebra) auf Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. Für jede Folge $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ liegt auch die Vereinigungsmenge
$$\bigcup_n^\infty A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots$$
in $\mathcal{A}$.

Betrachten wir diese bisweilen sehr allgemein gehaltene Definition nun durch die Brille unserer mit Wahrscheinlichkeiten zu messenden Ereignisse:

- In Bedingung 1 finden wir die naheliegende Forderung, dass das sichere Ereignis Ω in der Familie $\mathcal{A}$ der zu betrachtenden Ereignisse enthalten ist.
- In Bedingung 2 sichern wir ab, dass zu jedem Ereignis auch das Gegenereignis ein Element der Algebra, also des Mengensystems $\mathcal{A}$ ist (Abgeschlossenheit bezüglich mengentheoretischer Komplementbildung, womit offensichtlich auch die leere Menge in $\mathcal{A}$ enthalten ist).
- In Bedingung 3 wird die Abgeschlossenheit bezüglich beliebiger Vereinigungen gefordert (diese haben alle in $\mathcal{A}$ enthalten zu sein), woraus in Kombination mit Bedingung 2 augenscheinlich auch die Abgeschlossenheit bezüglich des Mengendurchschnitts folgt.

Bedingung 3 erschließt sich uns deutlich einfacher, wenn wir vorerst von einer endlichen Ergebnismenge Ω ausgehen. Dann reduziert sich diese Bedingung im Wesentlichen auf die verständliche Forderung, dass mit $A, B \in \mathcal{A}$ auch $A \cup B \in \mathcal{A}$ ist (wir erkennen hier die mengentheoretische Voraussetzung für unsere bekannte Summenregel der Wahrscheinlichkeits-rechnung).

Zusammenfassend geht es schlicht darum zu verlangen bzw. zu verstehen: Die σ-Algebra wird bei allen Zufallsexperimenten so konstruiert, dass wir ausnahmslos alle realisierbaren Ereignisse als Menge A formulieren können, das heißt, dass jedes „Ereignis A" als Teilmenge immer ein Element unserer σ-Algebra ist.
Im endlichen Fall wählen wir als Mengensystem üblicher- und naheliegender Weise die Potenzmenge von Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$. Die Potenzmenge ist die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω, somit haben wir auf ganz natürliche Weise ein Mengensystem, in dem jede mögliche Vereinigung, die Ergebnismenge Ω selbst, die leere Menge und alle Komplemente von Teilmengen enthalten sind.

Selbst bei unendlichen, aber zumindest noch diskreten bzw. abzählbaren Ergebnismengen kann man für die σ-Algebra stets die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ zugrunde legen und erhält somit den Ereignisraum $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.

Warum also nicht immer die Potenzmenge zu Grunde legen?

Die Probleme, die auftreten können, sind nicht in der Struktur der σ-Algebra begründet. Sie erscheinen erst, wenn man die Elemente der σ-Algebra messen will, d.h. wenn man ein Wahrscheinlichkeitsmaß einführen will. Ist unsere Ergebnismenge überabzählbar unendlich, z.B. ein reelles Intervall, und versucht man, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ zu definieren, so führt das zu Widersprüchen. Daher kann ein Maß nur auf einer echten Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert werden. Man möchte jedoch die σ-Algebra der messbaren Mengen möglichst groß wählen, damit möglichst viele Ereignisse gemessen werden können. Wenn Omega eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, wählt man als σ-Algebra das nach E. Borel (1871-1956) benannte System der Borelmengen. Diese σ-Algebra enthält alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen, und insbesondere die Menge aller abgeschlossenen, halboffenen und offenen Intervalle (auch mit den „Rändern“ ∞ und -∞). Alle irgendwie praktisch relevanten Teilmengen der reellen Zahlen sind Borelmengen, und im Rahmen der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten spielen letztlich nur Intervalle eine Rolle, die wir damit ganz sicher erfasst haben.

1.2 Wahrscheinlichkeitsmaß, Zufallsvariable und Erwartungswert

Die Wahrscheinlichkeit P ist eine Funktion bzw. Abbildung, die jedem Element A aus $\mathcal{A}$ (bzw. aus der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$) ein Maß $P(\mathrm{A})$ zuordnet, das Wahrscheinlichkeitsmaß. Es gilt: $0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1$.
Außerdem erfüllt P die Kolmogorow`schen Axiome wie Normiertheit und σ-Additivität [2].
Wir erhalten letztlich einen Maßraum $(\Omega,\mathcal{A}, P)$, den wir wegen $P(\Omega)=1$ Wahrscheinlichkeitsraum nennen. Bei den nachfolgenden Definitionen wollen wir uns vorerst auf den endlichen Fall konzentrieren mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ als Mengensystem:

Definition 2 (diskrete Zufallsvariable) [3]

Sei $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit abzählbarer Ergebnismenge Ω.
Dann heißt jede Funktion (Abbildung)

$$X\colon\ \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \omega \to X(\omega)$$

eine *diskrete Zufallsvariable* auf Ω .

Durch die Zufallsvariable X wird nun (automatisch) ein neues, auf dem Wahrscheinlichkeits-maß P fußendes Bildmaß P_X induziert. Einfacher ausgedrückt: Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werte der Zufallsvariablen. Mit dem eher technischen Begriff

[2] siehe einschlägige Literatur zu σ-Algebra, Kolmogorow-Axiome und σ-Additivität
[3] Definition nach [Kütting], S.190

„Zufallsvariable" ist hierdurch unmittelbar die Suche nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung verbunden.
Formal wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X als das Bildmaß P_X des Wahrscheinlichkeitsmaßes P definiert, mit dem nun jeder Realisierung $k \in X(\omega)$ eine Wahrscheinlichkeit zuordnet wird:

$$P_X(\{k\}) = P(X = k) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}) \quad k \in \mathbb{R}.$$

Didaktische Bemerkung: Bei einer Zufallsvariablen handelt es sich wie oben betrachtet um eine Abbildung, bei der wir unseren Focus nicht auf die Konstruktion der Abbildungsvorschrift richten (wie sonst üblich), sondern auf die in der Regel „direkt erkennbaren" verschiedenen (Funktions-)Werte, die diese Abbildung annehmen kann. Unser Tun entspricht insofern dem, wie wir es vom Variablenkonzept her kennen, der Funktionswert $X(\omega)$ ist die „Variable", die nach gegebener Vorschrift „unterschiedlich belegt" wird.
Was zufällig ist, ist das Ergebnis ω eines Zufallsexperiments, dadurch ist auch $X(\omega)$ zufällig; natürlich ist $X(\omega)$ aber festgelegt, wenn ω vorgegeben ist.

Die Werte, die $X(\omega)$ annehmen kann, also die „Realisierungen", werden mit kleinem Buchstaben, oft mit k (s.o.) bezeichnet. Man hätte sie auch mit x bezeichnen können, dies birgt aber die Gefahr der Verwechslung von x und X. Dieser Umgang mit Variablen auf verschiedenen „Zwischenebenen" stellt gewisse Herausforderungen bzw. Irritationen dar, denen die Schulbücher in unterschiedlicher Weise begegnen (siehe Kap. 3).

Die Definition von Zufallsvariablen lässt sich **im Fall einer überabzählbar unendlichen Menge $\boldsymbol{\Omega}$** wie bei den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zur folgenden Definition „vereinfachen":

Definition 3 (reelle Zufallsvariable)
Eine reelle Zufallsvariable ist eine Funktion $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis ω aus der Ergebnismenge Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet und die folgende Messbarkeitsbedingung erfüllt:
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

Einfach ausgedrückt bedeutet das eben nur, dass die Menge aller Ergebnisse, deren Realisierung unterhalb eines bestimmten Wertes liegt, ein Ereignis bildet.

Betrachten wir nun den „Erwartungswert einer Zufallsvariablen".

Der „Erwartungswert einer Zufallsvariablen" ist der Wert, den die Zufallsvariable auf lange Sicht im Mittel annimmt (Häufigkeitsinterpretation). Man spricht deshalb auch vom „Durchschnitt der Ergebnisse". Für statistische Untersuchungen ist dabei besonders interessant zu untersuchen, in welcher Form genau die Durchschnitte der Ergebnisse bei wachsender Anzahl der Experimente gegen den Erwartungswert streben, das heißt, wie die Stichprobenmittelwerte bei wachsender Stichprobengröße gegen den Erwartungswert konvergieren. Grundlage hierfür ist das Gesetz der großen Zahlen. In die Tiefe der damit verbundenen Theorie wollen wir hier nicht gehen und konzentrieren uns nun auf die folgende Definition 4. Für den stetigen Fall sei anschließend noch die Definition 5 erwähnt.

Definition 4 (Erwartungswert einer diskreten, endlichen Zufallsvariablen)

Sei $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit abzählbarer Ergebnismenge Ω und sei X eine Zufallsvariable, die endlich viele Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen kann.
Dann heißt

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Erwartungswert der Zufallsvariable X .

Der Erwartungswert ist also nichts anderes als das mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der realisierten Werte einer Zufallsvariablen.

Nimmt die Zufallsvariable abzählbar unendlich viele Wert an, ergibt sich:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$$ [4] .

Bei stetigen Verteilungen, also im Fall eines überabzählbar-unendlichen Wahrscheinlichkeitsraumes, muss eine bis auf endlich viele Stellen stetige Dichtefunktion f definiert werden. Sie ist das Analogon zur Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreten Verteilungen. Allerdings können ihre einzelnen Werte nicht als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden. Schließlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass zum Beispiel eine Maschine nach exakt 7,321321321... Stunden ausfällt, immer null, d.h. es gilt $P(\{X = x\}) = 0$ (Problem der "Punktwahrscheinlichkeit").

Notwendig ist, dass das Integral über den gesamten Definitionsbereich der Funktion f den Wert 1 annimmt. Das Integral der Dichtefunktion ist dann die Verteilungsfunktion F.
Summen der Art $x_i \cdot P(X = x_i)$, wie sie im diskreten Fall gebildet werden, müssen nun durch die Integrale über f „ersetzt" werden. In dieser Analogie ergibt sich dann die folgende Definition.

Definition 5 (Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit zugehöriger Dichtefunktion f.
Dann heißt

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Erwartungswert von X.

Schlussbemerkung: Es gibt Verteilungen, bei denen der Erwartungswert nicht existiert (z.B. die Cauchy-Verteilung, vgl. Anwendungen etwa in der Finanzmathematik).

2. Didaktische Reduktion

[4] Es sei die absolute Konvergenz dieser Reihe vorausgesetzt.

Verfasser: Bernhard Euler

……..….
.

Aufgaben im Umfeld der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind in der Schule vorzugsweise an Fragen der Art „Wie wirst du dich entscheiden?“ geknüpft. Insbesondere bei Aufgaben im Umfeld von Glücksspielen wird man sich fragen, ob das Spiel fair ist, bzw. welcher Gewinn bzw.
Verlust auf lange Sicht (pro Spiel) „zu erwarten“ ist.
Jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments bzw. jedem uns interessierenden Ereignis wird somit ein Wert, der „Gewinn“, zugeordnet. Dies stellt einen sehr einfachen, weil intuitiven Zugang zum Begriff der Zufallsvariable dar und nicht ohne Grund wird der Begriff Zufalls*variable* im Sinne der didaktischen Reduktion auch gerne durch „Zufalls*größe*“ ersetzt [5].

Die Einführung des Begriffs „Erwartungswert“ ist deshalb in der Schulbuchliteratur aus gutem Grund meist an Glücksspiele geknüpft. Man mag es dabei zu Recht als ein „didaktisches Prinzip der Stochastik“ bezeichnen, mathematische Problemstellungen so weit wie möglich an „Entscheidungsfragen“ zu knüpfen und dabei von den Absolutzahlen (Gesamtgewinn) auf die relativen Größen (Anteile) und damit auf die Wahrscheinlichkeiten zu schließen. So erschließt sich beispielsweise die Pfadregel genauso wie der Kalkül „Erwartungswert“.
Besonders motivierend zur Einführung des Erwartungswertes erscheinen Spielsituationen, deren Regeln leicht zu durchschauen und damit das Spiel leicht zu modellieren ist, zugleich aber die Entscheidungsregel nicht augenscheinlich daherkommt, bestenfalls gar einen kontraintuitiven Charakter hat.
Sowohl im Unterricht wie auch in der Schulbuchliteratur sind diese Gesichtspunkte mit dem Wunsch nach einem unversperrten, klaren Zugang abzuwägen. Komplexere Sachsituationen sollten in die Übungsphasen verlagert bzw. bewusst für binnendifferenzierte Sequenzen aufbereitet und genutzt werden.

Die Begründungsbasis zur Berechnung des Erwartungswertes einer Zufallsvariablen stellt das empirische Gesetz der großen Zahlen dar, was an sich als eine Plausibilitätsbetrachtung und damit als didaktische Reduktion des schwachen und starken Gesetzes der großen Zahlen gesehen werden kann. In dem Buch *Focus Mathematik Band 5 (Cornelsen 2008)* beispielsweise wird deshalb in einer Randbemerkung neben der Einführung des Erwartungswertes darauf noch einmal Bezug genommen (siehe Abschnitt 3.2).
Betrachtete man die zu erwartende relative Häufigkeit für das Eintreten eines Ereignisses als „Chance“, so kann man hiermit die zu erwartende Höhe eines Gewinns bei einer vorgegebenen Anzahl von Versuchen errechnen [6]. Bestimmt man dann aus dem zu erwartenden Gesamtgewinn den „durchschnittlichen Gewinn“ in einem einzigen Spiel, schließt sich der Kreis und man erkennt, dass letztlich jeder Gewinn (jeder Wert der Zufallsgröße) bei der Erwartungs-wertbildung mit der Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Gewinns gewichtet wird. Der Erwartungswert ist somit definiert.
Im aktuellen Schulbuch LS 5 [7] (siehe Abb.1) findet sich als starke didaktische Reduktion die Definition des Erwartungswertes dann nur noch in verbalisierter Form:

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsversuchs für die Zufallsvariable zu erwarten ist.
Der Erwartungswert wird folgendermaßen berechnet:
1. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen.
2. Man multipliziert jeden Wert der Zufallsvariablen mit seiner Wahrscheinlichkeit und addiert die Produkte.

[5] S
[6] D … nn einstellen“
[7] [

Abb. 1

3. Bezüge zu den Bildungsplänen und Vergleich der Schulbücher

3.1 Bildungsplanbezug

Im geltenden Bildungsplan von 2004 findet sich unter der Leitidee „Daten und Zufall“ die Kompetenz

> *Erwartungswert einer Zufallsvariablen verstehen und berechnen.* [8]

Erhellend wirkt darüber hinaus ein Blick in den neuen Bildungsplan von 2016, wo es heißt:

> *den Erwartungswert einer Zufallsgröße bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen.* [9]

Es fällt auf, dass im BP 2016 ausschließlich von Zufalls*größe* statt Zufalls*variable* die Rede ist. Außerdem mutet die Formulierung „berechnen“ der inhaltlichen Kompetenz etwas schwächer an, als im BP 2004 („verstehen“). Da der Unterricht auf Grundlage des Bildungsplans 2004 geführt wurde und dem entsprechend auch im eingeführten Lehrbuch der Begriff *Zufallsvariable* verwendet wird, findet sich dies auch so in dem hier dokumentierten Unterricht wieder.

Zur Klärung des gewünschten Kompetenzaufbaus lohnt ergänzend zu den inhaltlichen Kompetenzen ein Blick auf die *prozessbezogenen Kompetenzen* [10] :

Im Bereich *Argumentieren und Beweisen* bietet das Kapitel „Erwartungswert“ ein ergiebiges Feld, um in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen zu entwickeln und diese als mathematische Aussage zu formulieren. Dabei werden die Vermutungen anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität geprüft.
Im Rahmen der Kompetenz *Probleme lösen* werden Informationen bisweilen aus gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnommen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten. Dies hängt eng zusammen mit der Kompetenz *Modellieren*, die im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz besonders zum Tragen kommt. Diesbezüglich werden

- relevante Größen und ihre Beziehungen identifiziert,
- die Beziehungen zwischen diesen Größen mithilfe von Variablen, Termen, Gleichungen (…) oder Zufallsversuchen beschrieben,
- zu einer Situation passende mathematische Modelle ausgewählt bzw. konstruiert,
- die aus dem mathematischen Modell gewonnene Lösung in der jeweiligen Realsituation überprüft und
- die aus dem mathematischen Modell gewonnene Lösung bewertet.

[8] [MKJS 2004], S.100
[9] [MKJS 2016], S.36 3.3.5 (6)
[10] Die ab dieser Stelle folgenden Formulierungen basieren auf den prozessbezogenen Kompetenzen aus dem BP 2016 [MKJS 2016].

3.2 Vergleich der Schulbücher

Klett, Lambacher Schweizer 5 [11]

Zur Hinführung sollen zwei verschiedene Lotterien verglichen werden unter der Leitfrage „Wo gewinnt man mehr?". Eingeführt werden die Begriffe dann über eine neue Sachsituation, das Spiel „Chuck-your-luck". Aus dem Kontext heraus wird die Zufallsvariable als „Variable" für ein bestimmtes Ereignis (Bsp. „X=1" heißt „1 € Gewinn") ausgewiesen. „X=1" ist sozusagen die symbolische Kurzform für das Ereignis, das aus allen Ergebnissen besteht, die zu 1 € Gewinn führen. Die unterschiedlichen Abbildungsebenen verschwimmen damit zwar, allerdings erscheint die Verwendung des Begriffs „Variable" damit recht einsichtig. Der Begriff *Zufallsvariable* fällt alsbald unter dem Kontext der *Wahrscheinlichkeit dieser Zufallsvariablen*.
In der Symbolik ist das Buch konsequent: Die Werte, die die Zufallsvariable annehmen kann, werden allgemein mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet. Bei der Beschreibung des Begriffs *Erwartungswert*, im Sinne einer Definition, übt sich das Buch im zugehörigen Kasten in einer rein verbalisierten Darstellung. Ob dies für den auf klare Erkenntnis angewiesenen Schüler ein Gewinn ist, darf man bezweifeln. Nachfolgend kommt die Erläuterung in Symbolsprache, wobei hier noch einmal rückblickend auf die a-priori-Definition des „Wahrscheinlichkeits-begriffs" eingegangen wird: „*(...) kann berechnet werden, ohne dass der Zufallsversuch auch nur einmal durchgeführt wurde (...). Das tatsächliche Ergebnis ist aber nicht vorhersagbar*". Es folgen zwei weitere „Musteraufgaben", wobei auch die Umkehraufgabe, Bestimmung einer einzelnen Wahrscheinlichkeit für ein faires Spiel, beispielgebend gelöst wird.

Cornelsen, Fokus Mathematik Gymnasium Band 5 [12]

Angeboten werden drei verschiedene Sachsituationen: Ein Glückspiel (chuck-a-luck), eine statistische Auswertung (zu erwartende Gewinnauszahlung in einer Quizshow) und eine Schulweggeschichte (*Wie lange dauert der Schulweg durchschnittlich?*).
Im Rahmen der Auswertung der Spiele bildet dieses Buch dann den Prozess der didaktischen Reduktion am sichtbarsten ab. Offensichtlich möchte man beides: Eine schülernahe, intuitive Erschließung (entdecken) aus einem Sachkontext heraus und eine auf innermathematische Vollständigkeit bedachte Begriffsbildung.
Dies führt dazu, dass einerseits der Begriff „Zufallsvariable" durch „Zufallsgröße" ersetzt, andererseits auf den Begriff „Funktion" in diesem Zusammenhang nicht verzichtet wird. Begleitend erscheint als Begründungsbasis am Seitenrand ein kurzer Rückblick auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff.
Bezüglich der Symbolik wird sich nicht klar zu einer Schreibweise bekannt, wohl abermals mit dem Ansinnen auf Breite und Vollständigkeit. So findet sich sowohl $P(X = x)$ als auch $P(X = k)$ und dann in der Definition, ganz ohne Klammerschreibweise, aber diesmal mit Indizes: $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots$ *usw.* .
Das Buch wirkt mit den drei Beispielen sehr textlastig, bezüglich Symbolik und dem Wunsch nach Vollständigkeit zugleich überfrachtet und etwas orientierungslos. Der Anwendungskontext ist

[11] [Baum], S.133 ff
[12] [Lütticken], S.101 ff

nicht besonders motivierend. Der Aufgabenblock ist reichhaltig, dabei werden auch die Sachsituationen vielfältig gewechselt, was einen durchaus interessanten, ergiebigen Fundus hergibt.

Zu den nächsten beiden Büchern sei angemerkt, dass es sich bei beiden Ausgaben des Schroedel-Verlages um die Bände von Klasse 10 (Band 6) handelt, da in diesen Buchreihen in Klasse 9 keine Stochastik behandelt wird.

Schroedel, Elemente der Mathematik 5 [13]

Als Einführungsbeispiel erscheint ein (einfaches) Glücksspiel mit einem Glücksrad. Der Sachkontext ist somit leicht zu erschließen und führt unverschnörkelt zum Kern. Die Fragestellung nach dem „Einsatz", den die Schulklasse für ihr Glücksspiel verlangen soll, ist motivierend. Der vereinfachte Blick auf den Durchschnittsgewinn vermeidet zugleich einen ansonsten sperrigen Zugang über den Wahrscheinlichkeitsbegriff (das „Auf-lange-Sicht-Problem" wird erst einmal vermieden).
Die Aufgabe wird in einer „Musterlösung" gelöst, bevor es zur Verallgemeinerung und damit zur Begriffsbildung geht.
Bei der Definition der Zufallsvariablen bleiben die Autoren eng am Beispiel, indem die Zufallsvariable als „Zuordnung von Preis zu einem Ergebnis" ausgewiesen wird. Die Definition des Erwartungswertes greift letztlich zurück auf die Berechnung des arithmetischen Mittels einer Häufigkeitsverteilung. Bezüglich Begriffsbildung und Symbolik erscheint das Kapitel in einer klaren Linie: *Eine Zufallsvariable X nehme die Werte* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *an (…)*. Der Aufgabenblock ist sehr umfangreich, auch mit wenigen Umkehraufgaben.

Schroedel, Mathematik neue Wege 6 [14]

Ganz im Sinne eines „Arbeitsbuches" wird die Thematik an einem Spielbeispiel sehr ausführlich erörtert bzw. „erarbeitet". Dabei finden sich auch die Grundlagen des Wahrscheinlichkeits-begriffs (*häufiges Nachspielen des Zufallsversuchs*) sowie das Arbeiten mit Baumdiagrammen und der Pfadregel. „*Manchmal kann man sich besser verständigen, wenn man die richtigen Begriffe verwendet*", schreiben die Autoren, um die zuvor intuitiv gelöste Aufgabe mit *hilfreichen Vokabeln* zum gewünschten Ziel (Einführung der Begriffe) zu führen. Die Zufallsvariable wird als *die Größe, auf die es uns ankommt* vorerst intuitiv bereitgestellt und als neuer Begriff her nicht weiter hinterfragt.
In weiteren Beispielen wird der Erwartungswert als *die Bildung des gewichteten Mittels* dargelegt. Dabei wird auf die „Häufigkeitsinterpretation" verwiesen.
In der Symbolik verhält sich das Buch konsequent in der Darstellung $x_1 \cdot P(X = x_1)$ usw..
Im Aufgabenblock sind neben wenigen Routinefragen auch Fragen der Art „*kann das stimmen*" und „*tritt E(X) immer als Ergebnis auf*" zu finden. Umkehraufgaben finden sich auch.
Übersicht (zum Kapitel „Erwartungswert")

	Motivation, Hinführung	**Visualisierung**	**Symbolik** und Begriffe	Gestaltung des **Aufgabenteils**

[13] [Griesel], S.14 ff
[14] [Lergenmüller], S.63 ff

LS	Spiel (Lotterie mit Einsatz)	Baumdiagramm, Tabellen	Zufalls*variable* $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$ usw. nur E(X)	Umkehraufgabe auch als Musterbeispiel; Im Aufgabenteil wenig Routineaufgaben; Aufgaben variieren stark bzgl. Anspruchsniveau, Kalkül und Sachkontexte
Focus	Ansammlung mehrere Spiele	Tabellen	Zufalls*größe* $P(X = x)$, $P(X = k)$, $P(X = x_i)$ E(X), auch μ und $\mu(X)$ erwähnt	Aufgaben gestuft (*Trainieren*, *Anwenden*, *Vernetzen*), viele verschiedene Sachkontexte, Blick auf das „Beurteilen", nur am Ende „versteckt" Umkehraufgaben
EdM	Spiel auf Schulfest (einfaches Glücksrad)	Tabellen, Baumdiagramm	Zufalls*variable* $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$ usw. nur E(X)	Viele Routineaufgaben, später auch mit Umkehraufgaben; verschiedene Aufgabentypen, auch „Fehlersuchaufgaben"
Neue Wege	Focus auf das Modellieren von Spielsituationen	Baumdiagramm viele Tabellen	Schrittweiser Begriffsaufbau (sehr aus Intuitionen heraus) Zufalls*variable* $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$ usw. nur E(X)	Wenige Routineaufgaben, viele Fragen bzgl. Begründen; auch Fehlersuche, erst am Ende zwei Umkehraufgaben

3.3 Produktives Üben

Nach Wittmann[15] existieren folgende Merkmale für produktives Üben und aktiv-entdeckendes Lernen:

- Der Schüler wird veranlasst, eigene Denkleistungen zu erbringen, Hindernisse und Widerstände werden ihm nicht aus dem Weg geräumt, nur so lernt er, sie zu überwinden.
- Bewusstheit und Verantwortung des Schülers für sein Lernen werden gefördert.
- Die starke persönliche Beteiligung bei der Erarbeitung von Kenntnissen, Fertigkeiten und Denkstrategien führen zu viel besseren Langzeiterfolgen.
- Lernen und Üben in Sinnzusammenhängen entspricht dem Wesen der Mathematik und ihren Anwendungen.

Im idealen Fall regen produktive Übungsformate zum „Erstellung von Produkten" an. Eben dies war das Unterrichtsziel der abschießenden Übungsstunde, aufbauend auf dem vorausgehenden Unterricht. Demgemäß stand die Unterrichtsplanung und Umsetzung auch immer im Focus der Zielführung auf diese letzte Stunde der Unterrichtseinheit hin. Hier mussten die Schülerinnen und Schüler nach gewissen Vorgaben Spiele selbst erfinden. Anregung und Idee für diese letzte Stunde wurden entnommen aus dem Fortbildungsmaterial der Fachberater des Stuttgarter Sprengels[16].

4. Der Unterricht

Der Begriff *Zufallsvariable* wurde als solcher unmittelbar in Verbindung mit dem Erwartungswert eingeführt. Als motivierendes Spiel hatte ich mich für das Glücksraddrehen entschieden.

[15] [Wittmann]
[16] [Sprengel]

Rahmengebend für die ganze Unterrichtseinheit ist die Idee, Glücksspiele für ein Schulfest zu entwickeln[17]. Das Drehen eines Glücksrades bietet dabei die besten Möglichkeiten, ohne Verlust an Anschaulichkeit durch die Wahl der Sektorengröße geeignete Werte für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zu generieren. Die Zufallsvariable reduzierte sich begrifflich auf den „Betrag des Gewinns". Eine Doppelbelegung mit Variablen (X, x und k) habe ich über den gesamten Unterricht vermieden, auch bei den Tabellen ($X=3$ statt $X=k$ *mit* $k=3$), was meiner Meinung nach bis zum Thema „Binomialverteilung" keinerlei Probleme, sondern schlicht eine Entlastung bedeutet.
Dann, in einer **Doppelstunde,** wurden die Begriffe *Zufallsvariable* und *Erwartungswert* im Rahmen einer Planarbeit eingeführt, mit anschließenden Übungsaufgaben aus dem Buch.

In nachfolgenden, **zweiten Doppelstunde** haben wir begonnen, eigene Aufgaben zu erfinden. Auch die Umkehraufgabe, das Finden eines geeigneten Wertes von X bei vorgegebenem Erwartungswert $E(X)$, stand dabei im Fokus. Das eingesetzte Arbeitsblatt (siehe Anhang 1) wurde in Partnerarbeit bearbeitet und anschließend im Plenum diskutiert.

Folgende Intentionen liegen diesem Arbeitsblatt zugrunde:

- Spielsituation eigenständig beschreiben[18], Spiele variieren und mathematisch auswerten.
- Beim Hintereinanderdrehen der beiden Glücksräder von Aufgabe 1 ergibt sich, wie man bei näherem Hinschauen unschwer erkennen kann, ein „faires Spiel" (kein Einsatz vorausgesetzt).
- Nun kann man versuchen, die Spielregeln zum eigenen Vorteil zu modifizieren oder andere Glückräder entsprechend zu beschriften, motiviert dadurch, dass der Nachbar diese Aufgabe dann zu lösen hat.
- Im zweiten Teil des Arbeitsblattes wird zu einem vorgegebenen Erwartungswert das passende Glücksrad kreiert. In dieser Aufgabe steht der Variablenaspekt beim Problemlösen im Vordergrund.

In der **dritten Doppelstunde** wurden die Schülerinnen und Schüler dann ganz im Sinne des produktiven Übens mit verschiedenen Spielsituationen konfrontiert, aus denen Sie dann in Kleingruppen geeignete Spiele (Spielregeln) kreiert haben (siehe Anhang 2 und 3). Die Ergebnisse wurden im Plenum von den einzelnen Gruppen präsentiert, worauf die Zuhörer das Spiel mathematisch auszuwerten hatten (rechnerisch lösen und ihre Ergebnisse mit den Intentionen der Spieleerfinder abgleichen mussten (gleiche Ergebnisse, gleiche Erkenntnisse?).

---

[17] Es ist nicht auszuschließen, dass die Klasse tatsächlich auf einem Schulfest eine Ausstellung mit Glücksspiele organisiert. Die Gäste könnten diese ausprobieren, der Gewinn käme in die Klassenkasse für die nächste Klassenfahrt und zugleich würden die SuS auf Plakaten die „mathematischen Hintergründe" zu jedem Spiel präsentieren.
[18] Dabei sollte man sich an das Spiel aus der vorherigen Stunde erinnern, bei dem die beiden Räder hintereinander gedreht werden und die Differenz der erschienen Ziffern als Auszahlungsbetrag in Euro gezahlt werden muss.

5. Reflexion und Schülerergebnisse

Das selbstständige „Entdecken der Definition für den Erwartungswert“ stellt letztlich keine Schwierigkeiten dar, befolgt man das schrittweise Vorgehen von den absoluten Häufigkeiten der zu erwartenden Ergebnisse hin zu dem „im Mittel pro Spiel“ zu erwartenden Ergebnis (Durchschnittswert).
Übungen im Buch haben schnell Routinen hervorgerufen, nahezu alle Schülerinnen und Schüler können demnach aus meiner Sicht Erwartungswerte problemlos berechnen.
Sobald aber bei Umkehraufgaben der zielführende Einsatz einer Variablen verlangt war, traten Probleme auf. Einige Schülerinnen und Schüler haben beim Aufstellen eines Terms für den Erwartungswert die einzelnen Ergebnisse unsinnigerweise multipliziert anstatt sie zu addieren. Hier zeigte sich eine gewisse Übergeneralisierung der Pfadregel. Zusätzlicher, abstrakt anmutender Unterrichtsstoff verschleiert offensichtlich den Blick auf einfache „Grundvorstellung“. Geht es hier doch letztlich um das „Dazuzählen“ (zweimal ein Gewinn a ergibt den Gewinn $a+a=2a$ und nicht a^2).
Wieder stehen Abstraktion und der Wunsch nach (sinnfreiem) Anwenden vermeintlicher Rechenregeln dem Modellieren einfacher Sachverhalte im Wege. Nach meiner Erkenntnis ist es deshalb erforderlich, immanent an Grundvorstellungen zu arbeiten, insbesondere in Verbindung mit dem Variablenkonzept. Eben dies rechtfertigt unbedingt eine abschließende ausführliche Behandlung von Umkehraufgaben im Umfeld des Erwartungswertes bzw. verlangt dies sogar, auch wenn dies vom Bildungsplan her auch Zukunft nicht festgelegt sein wird.

Aus den Spielen, die von den Schülern selbst erfunden wurden, habe ich für die vorliegende Dokumentation **drei Beispiele** ausgewählt, die ich als Beispielgebend für eine zu erwartende Vielfalt an Schülerleistungen empfinde (siehe Anhang 3):

1. **Gruppe C** (die „Sparversion“)
   Man könnte sagen, hier haben sich die Schülerinnen und Schüler geschickt aus der Affäre gezogen, indem sie die einfachste aller möglichen „Lösungen“ des Arbeitsauftrages erkannt und entsprechend dem Bestreben nach möglichst geringem Aufwand dokumentiert haben. Sie haben sich somit die Chance genommen, durch produktives Üben, durch zielgerichtetes Probieren und gemeinsames Diskutieren die Begrifflichkeiten zu festigen und Sicherheit im Rechnen zu gewinnen.

2. **Gruppe D** (die „engagierte Gruppe“)
   Hier zeigt sich der Prozess hin zu einem sicheren Umgang mit der Symbolik und damit zu einem Verständnis der „Sprache der Mathematik“: Der Umgang mit der Zufallsvariablen ist bisweilen noch sehr unsicher (falsch), dies wird aber durchaus schon erkannt (Zweifel, die zum Durchstreichen führten). Außerdem erkennt man am veränderten Auszahlungswert ein intensives „Lösen durch Probieren“. Dieses zielführende Probieren führt zu immer neuen Rechnungen, wodurch letztlich auch der Aufbau von Rechenroutinen gefördert wird.

3. **Gruppe E** (die „kreativste Lösung“)
   Das hier erfundene Spiel ist nicht nur kreativ, sondern in vielerlei Hinsicht auch genial:

Wer sich auf dieses Spiel einlässt, hat selbst nach dem zweiten Schritt zumeist noch die Hoffnung auf einen Gewinn. Insgesamt erscheint das Spiel trotz eines Einsatzes von 1 € als durchaus fair. Der tatsächliche Erwartungswert ist nicht einfach zu erkennen, es erscheint somit reizvoll, sich auf das Spiel einzulassen. In der Tat errechnet sich dann ein Erwartungswert von 400/720 = 5/9 = $0,\overline{5}$, welcher, wie gewünscht, aus Sicht des Spielebetreibers langfristig zu deutlichen Gewinnen führt.

6. Fazit

Dass der Umgang mit Variablen immanent geübt und zum Problemlösen kreativ eingesetzt werden soll, wurde bereits oben erläutert. Hierzu bietet sich beim Thema Erwartungswert, wie in vielen anderen Themenfeldern auch, die Implementierung von Umkehraufgaben unbedingt an.

Das Produzieren eigener Spiele, somit das „produktive Üben" stellte sich aus inner-mathematischen, lernförderlichen wie auch motivationalen Gesichtspunkten als ausgesprochen lohnend heraus:

- Routinebildung: In dem Moment, wo es um den kreativen Einsatz bisher erlernter Kalküle ging, wirkten die meisten Schülerinnen und Schüler erstaunlich sicher im Umgang mit Pfadregel, Summenregel sowie bei der Nutzung eines zielführenden Baumdiagramms. In der Auseinandersetzung mit der „Realsituation" und dem damit verbundenen Problemlösen haben sie Routinen in der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bekommen und zugleich Routinen in der Bruchrechnung gepflegt. Mehrfaches Ausprobieren variierender Spielregeln erzeugte eine große Anzahl von Aufgabenbeispielen, was nachhaltig zur Sicherung von Grundkompetenzen beitrug.
- Motivation: Nicht nur die Vorarbeit, sondern auch die Präsentation hat den Schülerinnen und Schülern viel Freude und Kompetenzerleben beschert. Das Werben für das eigene, selbst erfundene Spiel war ein großer Antrieb dabei.
- Legitimation: Die gelernten Inhalte wurden als besonders sinnhaltig, realitätsnah und für das Verstehen der eigenen „Umwelt" notwendig und gewinnend begriffen.
- Binnendifferenzierung: Alle Schülerinnen und Schüler konnten auf der Ebene ihres jeweils eigenen Kompetenzstandes arbeiten, kreativ wirken und sich kognitiv entfalten. Im Kommunizieren mit den Gruppenmitgliedern wurde der Kenntnisstand sowie die Fachsprache individuell weiterentwickelt, dazu haben letztlich die oben erwähnten Punkte beigetragen.

Produktives Üben kann in vielen Themenbereichen auf recht einfache, unaufwendige Weise in Übungsphasen berücksichtigt werden. Hierzu lohnt es sich, in den reichhaltigen Quellen (Internet etc.) Anregungen zu holen. Eine Nuancierung des Mathematikunterrichts in diese Richtung ist für alle Beteiligten in vielerlei Hinsicht ein Gewinn. Zugleich darf beim Üben die Ansammlung von Routineaufgaben nicht schlecht geredet werden. Deren Funktion wurde bei der Suche nach moderneren, nachhaltigeren Unterrichtsformen teilweise sehr unterschätzt. Es gilt, mehr denn je ein ausgewogenes, der individuellen Schülerschaft angemessenes Gleichgewicht zu finden aus Routinebildung und Problemlösung.

7. Literatur

[MKJS 2004] Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2004): Bildungsplan 2004. Allgemein bildendes Gymnasium. Stuttgart

[MKJS 2016] Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2016): Bildungsplan des Gymnasiums 2016 – Endfassung vom 23. März 2016. Stuttgart

[Wittmann] Abgerufen aus http://www.eduhi.at/dl/Entdeckender_MAunterricht.pdf

[Kütting] Kütting, H.; Sauer, M.J. (2008): Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte (2. Auflage). Spektrum Berlin, Heidelberg.

[Baum] Baum, M. u.a. (2007): Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasien. Baden-Württemberg. Klett Stuttgart.

[Griesel] Griesel, H. u.a., (2008) Elemente der Mathematik 5. Baden-Württemberg. Schroedel Braunschweig.

[Lergenmüller] Lergenmüller, A. u.a. (2009): Mathematik neue Wege 6, Arbeitsbuch für Gymnasien. Baden-Württemberg. Schroedel Braunschweig.

[Lütticken] Lütticken, R. u.a. (2008): Focus Mathematik Gymnasium Band 5. Baden-Württemberg. Cornelsen Berlin.

[Sprengel] Material aus der regionalen Fortbildung der Fachberater im Sprengel Stuttgart, Thema: Standards 10. Stuttgart 2009.

Versicherung:

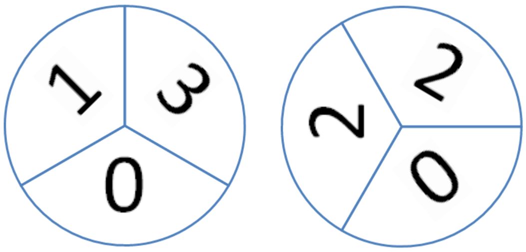
Ich versichere, dass ich dieses Skript selbständig angefertigt, nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht habe.

(eigenhändige Unterschrift)

Anhang 1

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert einer Zufallsvariable

Übung 1:



Zufallsversuch:

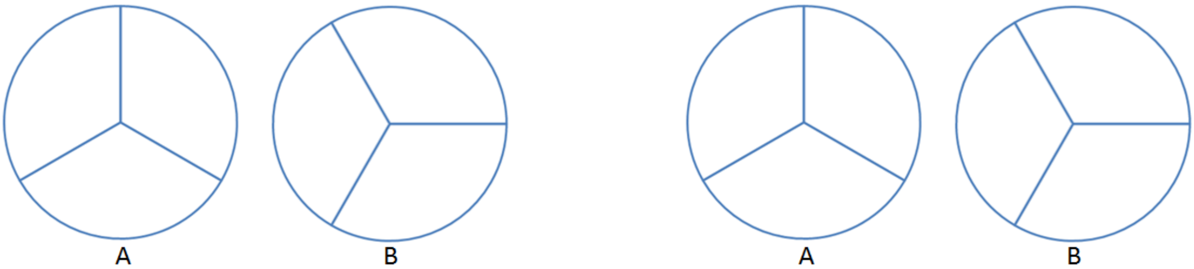
X zählt …

Aufgabe: Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Tabelle; E(X) berechnen, Spielregel festlegen (vgl. letzte Stunde) …

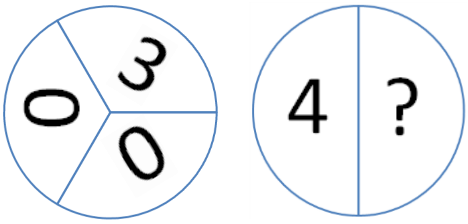
Mögliche Steigerung: Das Spiel wird zweimal hintereinander gespielt, das Produkt der Ergebnisse wird ausgezahlt, usw. …

➔ **Heft**: *sauber aufschreiben, richtige Symbolik!! NICHT einfach hinschmieren!!*

Erfinde weitere Aufgaben dazu, lasse sie von deinen Sitznachbarn lösen:

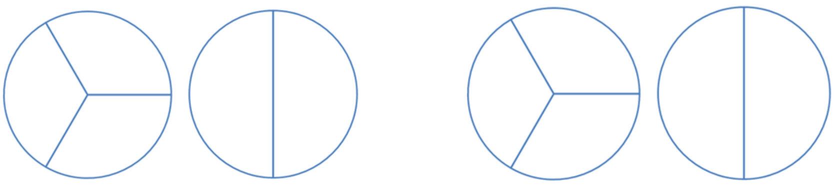


Übung 2:



Spiel wie oben, Einsatz ist 4 €, **was muss auf dem unbekannten Feld stehen, damit das Spiel fair ist**?

Überlege dir auch hierzu weitere Aufgaben …



Anhang 2: Inhalte der Arbeitsblätter zur Gruppenarbeit „Spiele erfinden“

Gruppe A

- Gespielt wird mit drei Würfeln (rot, blau und grün) mit den Augenzahlen 0 bis 9.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

Variante: Wenn euch die Vorgaben zu sehr einschränken, dann erfindet selbst ein „verführerisches“ Spiel, das einem mehrstufigen Zufallsexperiment entspricht. Klärt dabei die Regeln, den Einsatz und berechnet, was ein Spieler auf lange Sicht im Durchschnitt pro Spiel erwarten darf.

Zeit: 30 Minuten

Anschließende Präsentation: Spiel vorstellen, E(X) berechnen lassen, mit eigenen Ergebnissen und Erkenntnissen vergleichen, Diskussion …

Schreibt für die Präsentation eure Ergebnisse auf die Folie:

Gruppe B

- Gespielt wird mit fünf Farbwürfeln (weiß, gelb, rot, grün, blau, schwarz).
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

(…)

Gruppe C

- Gespielt wird mit 9 Spielkarten (4 Könige, 3 Damen, 2 Buben).
- Beim Spiel sollen drei Karten mit Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

(…)

Gruppe D

- Gespielt wird mit 9 Spielkarten (4 Zehner, 3 Neuner, 2 Achter).
- Beim Spiel sollen drei Karten ohne Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

(…)

Gruppe E

- Gespielt wird mit 10 bunten Weihnachtsschokokugeln (5 blaue, 3 gelbe, 2 rote).
- Beim Spiel sollen drei Schokokugeln mit Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

………...….
.

(…)

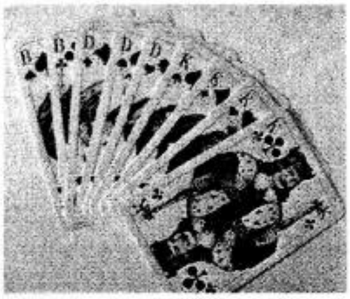
Gruppe F

- Gespielt wird mit 10 bunten Weihnachtsschokokugeln (5 gelbe, 3 rote, 2 blaue).
- Beim Spiel sollen drei Schokokugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

(…)

Anhang 3: drei Ergebnisse aus der Gruppenarbeit

Gruppe C



- Gespielt wird mit 9 Spielkarten (4 Könige, 3 Damen, 2 Buben).
- Beim Spiel sollen drei Karten mit Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

Variante: Wenn euch die Vorgaben zu sehr einschränken, dann erfindet ein Spiel, das einem mehrstufigen Zufallsexperiment entspricht. Klärt dabei die Regeln, den Einsatz und berechnet, was ein Spieler auf lange Sicht im Durchschnitt pro Spiel erwarten darf.

Zeit: 30 Minuten

Schreibt für eine anschließende Präsentation eure Ergebnisse auf Folie.

Karten-Lotto:

Einsatz: 1 €

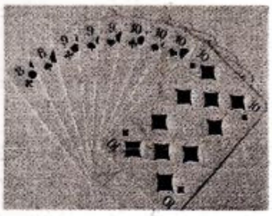
Gewinn: bei 3 Buben erhält man 8201,25 €
Sonst nix!

x	8201,25
$P(x)$	$\frac{8}{729}$

$$E(x) = 82{,}0125 \cdot \frac{8}{729} = 0{,}9$$

Julia Shabane Elias

Gruppe D



- Gespielt wird mit 9 Spielkarten (4 Zehner, 3 Neuner, 2 Achter).
- Beim Spiel sollen drei Karten ohne Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

Variante: Wenn euch die Vorgaben zu sehr einschränken, dann erfindet ein Spiel, das einem mehrstufigen Zufallsexperiment entspricht. Klärt dabei die Regeln, den Einsatz und berechnet, was ein Spieler auf lange Sicht im Durchschnitt pro Spiel erwarten darf.

Zeit: 30 Minuten

Schreibt für eine anschließende Präsentation eure Ergebnisse auf Folie.

ziehe 3 von 9 Karten

(4 Zehner, 3 Neuner, 2 Achter) Kreuz 8 muss dabei sein)

Spieleinsatz beträgt 1€

Auszahlungen:

10€ für 3x die 9: $P(X=3) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \approx 0{,}012$

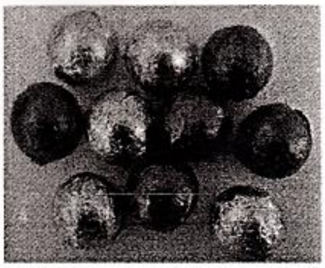
5€ für die Summe 30: $P(X=30) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \approx 0{,}048$

~~8€~~ 1,5€ für Kreuz 8: $P(\cancel{X=8}) = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{7} + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} + \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} \approx 0{,}333$

„Kreuz 8"

$E(X) = \underline{86ct}$

Max, Luca, Minori, Jenny



Gruppe F

- Gespielt wird mit 10 bunten weiße Weihnachtsschokokugeln (5 ~~gelbe~~, 3 rote, 2 blaue).
- Beim Spiel sollen drei Schokokugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.
- Der Einsatz beträgt 1 €.
- Der Auszahlungsplan besteht aus drei Auszahlungsklassen.
- Der Anbieter des Spiels soll auf lange Sicht im Durchschnitt ca. 10% des Einsatzes als Gewinn erhalten.

Variante: Wenn euch die Vorgaben zu sehr einschränken, dann erfindet ein Spiel, das einem mehrstufigen Zufallsexperiment entspricht. Klärt dabei die Regeln, den Einsatz und berechnet, was ein Spieler auf lange Sicht im Durchschnitt pro Spiel erwarten darf.

Zeit: 30 Minuten

Schreibt für eine anschließende Präsentation eure Ergebnisse auf Folie

Man zieht 3 Kugeln aus der Urne.
Die gezogenen Kugeln werden nicht zurück gelegt.
Wenn man die richtige Reihenfolge für eine der 3 Flaggen oben zieht, gibt es einen

GEWINN

Österreich: 5€
Russland: 5€
Honduras: 10€

Spielen sie mit! Nur noch für kurze Zeit sind sie mit einem Einsatz von nur 1 Euro dabei!