

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 2

Aufgabe 5 Sei K ein Körper. Sei S ein Ring, in welchem $0_S \neq 1_S$ ist.

Sei $\varphi : K \rightarrow S$ ein Ringmorphismus. Man zeige folgende Aussagen.

- (1) Es gibt in K nur die Ideale 0 und K .
 - (a) Man zeige dies ohne Verwendung einer Aussage über maximale Ideale.
 - (b) Man zeige dies unter Verwendung einer Aussage über maximale Ideale.
- (2) Es ist $\text{Kern}(\varphi) = 0$.
- (3) Es ist φ injektiv.

Aufgabe 6

- (1) Man zeige: Es ist

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ a + 21\mathbb{Z} &\mapsto (a + 3\mathbb{Z}, a + 7\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ein Ringisomorphismus.

Man bestimme Urbilder von $(1 + 3\mathbb{Z}, 0 + 7\mathbb{Z})$ und von $(0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 7\mathbb{Z})$.

Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für die Umkehrabbildung φ^{-1} .

- (2) Man bestimme einen Ringisomorphismus φ von $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für φ^{-1} .
- (3) Man bestimme einen Ringisomorphismus φ von $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - X)\mathbb{Q}[X]$ nach $\mathbb{Q}[X]/X\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X]/(X - 1)\mathbb{Q}[X]$.
- (4) Man bestimme einen Ringisomorphismus ψ von $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - X)\mathbb{Q}[X]$ nach $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für ψ^{-1} .

Aufgabe 7 Man finde jeweils ein $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für welches die Gleichung gilt (unter (3): beide Gleichungen gelten).

- (1) $12\mathbb{Z} \cap 30\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$
- (2) $12\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$
- (3) $6\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}$ und $6\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$
- (4) $108\mathbb{Z} + (54\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}) = a\mathbb{Z}$

Aufgabe 8 Wir betrachten den Ringmorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ a &\mapsto (a + 4\mathbb{Z}, a + 6\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

- (1) Man bestimme ein Element in $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \setminus \varphi(\mathbb{Z})$.
- (2) Man bestimme ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $k\mathbb{Z} = \text{Kern}(\varphi)$.
- (3) Man gebe die Charakteristik $\text{char}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ an.
- (4) Unter Verwendung des Homomorphiesatzes bestimme man $|\varphi(\mathbb{Z})|$, d.h. die Anzahl der Elemente im Bild von φ .