

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Man gebe bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 125 an:

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Wir betrachten die Elemente $6 - 3i$ und $3 + i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

(a) Man bestimme $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit $6 - 3i = (3 + i) \cdot q + r$ und mit $|r|^2 < |3 + i|^2$.

$$q = \boxed{} \quad r = \boxed{}$$

(b) Man bestimme einen größten gemeinsamen Teiler g von $6 - 3i$ und $3 + i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

$$g = \boxed{}$$

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F}_3 \right\} \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{F}_3) =: G$.

(a) Es ist $|G| = \boxed{}$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{F}_3$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{}$. Folglich ist $U \trianglelefteq G$.

(c) Es ist $|U| = \boxed{}$.

(d) Sei $V \trianglelefteq G$ mit $|V| = 3$ gegeben. Gibt es ein $g \in G$ mit ${}^gU = V$? Begründen Sie.

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Summe	Note
Punkte	/3	/3	/2	/2	/2	/3	/4	/2	/2	/3	/4	/ 30	

Algebra für Lehramt

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
Begründungen sind nur anzugeben, falls in der Aufgabe verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Man bestimme ein $x \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ mit $x \neq 1$ und $x^3 = 1$.

$$x = \boxed{}$$

(b) Man berechne: $v_3(36) = \boxed{}$

(c) Man bestimme ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $4\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ und $4\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

$$a = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Man bestimme $a, b, c \in \mathbb{F}_3$ mit

$$\frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} \in \mathbb{F}_3(X).$$

$$a = \boxed{}$$

$$b = \boxed{}$$

$$c = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Wir betrachten das Ideal $I := (X^2 - Y, X - Y^2) \subseteq \mathbb{Q}[X, Y]$.

Ist $X^3 - Y^3 \in I$? Man begründe:

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Man bestimme eine Matrix $D \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ in Elementarteilerform, für welche es $S, T \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $SAT = D$.

$$D = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

(a) Man gebe einen Hauptidealbereich R an, der kein Körper ist.

$$R = \boxed{\phantom{\mathbb{Z}}}$$

(b) Man gebe einen Integritätsbereich S an, der kein Hauptidealbereich ist.

$$S = \boxed{\phantom{\mathbb{Z}[X]}}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

(a) Sei $f := (1, 2, 3, 4) \in S_4$.

Man bestimme die Untergruppe $U := \langle f \rangle \leq S_4$ durch Angabe ihrer Elemente.

$$U = \left\{ \right\}$$

(b) Man bestimme ein Element $g \in S_4$ mit ${}^g f = f^3$.

$$g = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Man zeige oder widerlege die angegebene Aussage.

(a) Sei G eine Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$. Sei N zyklisch. Sei G/N zyklisch. Dann ist G zyklisch.

(b) Sei G eine Gruppe. Seien $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Sei $g \in G$ ein Element mit $|\langle g \rangle| = ab$. Dann ist $|\langle g^a \rangle| = b$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 72$.

Dann ist $|\text{Syl}_3(G)| = \boxed{}$ oder $|\text{Syl}_3(G)| = \boxed{}$.