Bsp Sei p prim. Sei $\overline{\mathbb{F}}_p \,|\, \mathbb{F}_p$ ein algebraischer Abschluss.

Wir haben die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{F}}_p &\xrightarrow{\mu} \mathbb{F}_p[X] \\ y &\longmapsto \mu_{y,\mathbb{F}_p}(X). \end{aligned}$$

Jedes irreduzible normierte Polynom $g(X)$ in $\mathbb{F}_p[X]$ liegt im Bild:

Es gibt $\mathbb{F}_p(\xi) \,|\, \mathbb{F}_p$ mit $\mu_{\xi,\mathbb{F}_p}(X) = g(X)$.

Es gibt einen Körpermorphismus

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_p(\xi) \arrow[rr, "\varphi"] & & \overline{\mathbb{F}}_p \\ & \mathbb{F}_p \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Es ist $\mu_{\varphi(\xi),\mathbb{F}_p}(X) \underset{\substack{\varphi|^{\varphi(\mathbb{F}_p(\xi))} \\ \text{Isomorphismus über } \mathbb{F}_p}}{=} \mu_{\xi,\mathbb{F}_p}(X) = g(X)$.

Es ist $\mu^{-1}(g(X))$

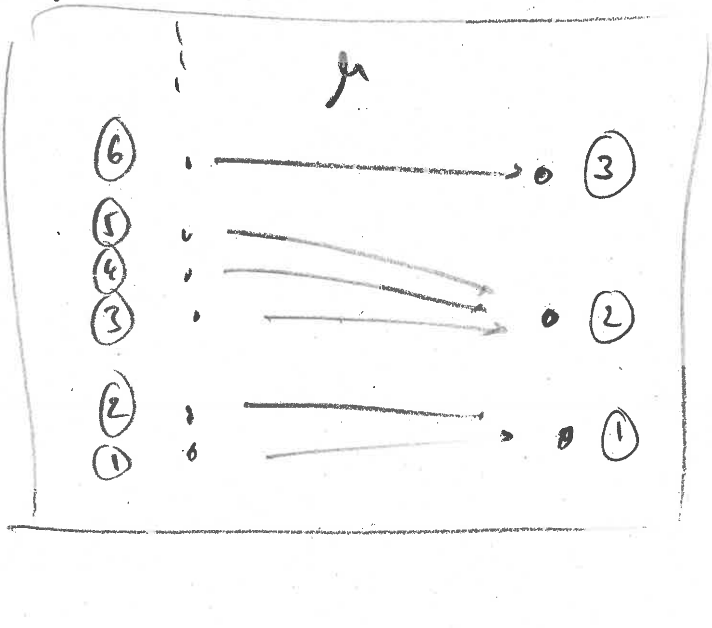
$= \{ y \in \overline{\mathbb{F}_p} : g(y) = 0 \}$,

denn $g(y) = 0 \Rightarrow g(X) = \mu_{y,\mathbb{F}_p}(X)$

$g(x)$ normiert & irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$

Da $g(X)$ höchstens $\deg(g(X))$ Nullstellen hat, ist $\mu^{-1}(g(X))$ endlich.

Da zudem $\mathbb{F}_p[X]$ abzählbar ist, ist $\overline{\mathbb{F}_p}$ abzählbar:



Bsp $(L \mid K) = (\mathbb{F}_4 \mid \mathbb{F}_2)$

$$(\Pi \mid K) = (\overline{\mathbb{F}_2} \mid \mathbb{F}_2)$$

alg. Abschluß

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_4 \arrow[rr, "\exists \text{ inj. Kp.morph.}", "\varphi"'] & & \overline{\mathbb{F}_2} \\
& \mathbb{F}_2 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Sogar 2 Körpermorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_4 \arrow[r, "\mathrm{Fr}", "\sim"'] \arrow[rr, bend left, "\tilde{\varphi}"] & \mathbb{F}_4 \arrow[r, "\varphi"'] & \overline{\mathbb{F}_2} \\
& \mathbb{F}_2 \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Also φ und $\tilde{\varphi}$ vorhanden.

Bsp Sei $A = \{ y \in \mathbb{C} \mid y$ algebraisch über $\mathbb{Q} \}$

Dann: $\mathbb{C} \mid \underbrace{A \mid \mathbb{Q}}_{\text{algebraischer Abschluss}}$.

z.B. ist $i \in A$ und $\sqrt{2} \in A$.

Also ist auch $i - \sqrt{2} \in A$.

Minimalpolynom von $i - \sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$:

$$(i-\sqrt{2})^0 = 1$$

$$(i-\sqrt{2})^1 = i - \sqrt{2}$$

$$(i-\sqrt{2})^2 = -1 - 2i\sqrt{2} + 2$$

$$= 1 - 2i\sqrt{2}$$

$$(i-\sqrt{2})^3 = (1-2i\sqrt{2})(i-\sqrt{2})$$

$$= i + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4i$$

$$= 5i + \sqrt{2}$$

⋮

$$(i-\sqrt{2})^4 = (5i+\sqrt{2})(i-\sqrt{2})$$

$$= -5 + i\sqrt{2} - 5i\sqrt{2} - 2$$

$$= -7 - 4i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (i-\sqrt{2})^4 - 2(i-\sqrt{2})^2 = -9$$

$\Rightarrow$ $i-\sqrt{2}$ ist Nullstelle von

$$X^4 - 2X^2 + 9$$

$\mathbb{Q}(i-\sqrt{2})$ Teilkörper von $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$,

der Grad $[\mathbb{Q}(i,\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 4$

hat $\Rightarrow$ $[\mathbb{Q}(i-\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] \in \{1, 2, 4\}$

Nicht 1, 2 : s.o. Also 4.

$$\Rightarrow \mu_{i-\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) = X^4 - 2X^2 + 9$$