Bsp Ist $f(X) := X(X^2+1)^3 \in \mathbb{Q}[X]$ quadratfrei?

Direkte Betrachtung: nein, denn $(X^2+1)^2$ teilt $X(X^2+1)^3$

Mit Kriterium:

$$f'(X) = 1 \cdot (X^2+1)^3 + X \cdot 3(X^2+1)^2 \cdot 2X$$
$$= (X^2+1)^2 (X^2+1 + 6X^2)$$
$$= (X^2+1)^2 (7X^2+1)$$

$$\operatorname{ggT}(f(X), f'(X))$$
$$= \operatorname{ggT}(X(X^2+1)^3, (X^2+1)^2(7X^2+1))$$
$$= (X^2+1)^2 \neq 1$$

$\Rightarrow$ $f(X)$ nicht quadratfrei

Bsp Sei $K := \mathbb{F}_2(T)$. Es ist

$$f(X) = X^2 + T \in K[X]$$

mangels Nullstelle irreduzibel, also quadratfrei. Aber:

$$\operatorname{ggT}(f(X), f'(X))$$

$$= \operatorname{ggT}(X^2 + T, 0)$$

$$= X^2 + T \neq 1$$

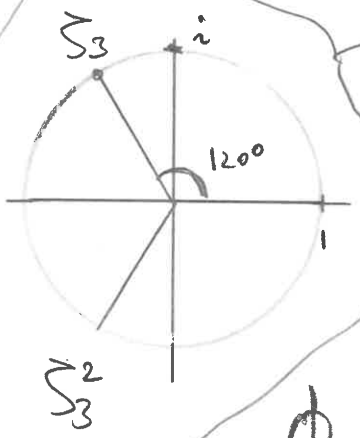
Die Voraussetzung an die Charakteristik in Lemma 220.(2) kann also nicht ersatzlos entfallen.

<u>Bsp</u>

$$\Phi_1(X) = X - \zeta_1^0 = X - 1$$

$$\Phi_2(X) = X - \zeta_2^1 = X + 1$$

$$\Phi_3(X) = (X - \zeta_3^1)(X - \zeta_3^2)$$



$$= \left(X - \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right)\left(X - \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right)$$

$$= X^2 + X + 1$$

$$\Phi_4(X) = (X - \zeta_4^1)(X - \zeta_4^3)$$

$$= (X - i)(X - (-i))$$

$$= X^2 + 1$$

$$\Phi_5(X) = (X - \zeta_5^1)(X - \zeta_5^2) \cdot (X - \zeta_5^3)(X - \zeta_5^4)$$

$$= \frac{X^5 - 1}{X - 1} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Bsp Wir berechnen $\Phi_{15}(X)$.

$$\Phi_1(X)\,\Phi_3(X)\,\Phi_5(X)\,\Phi_{15}(X) = X^{15}-1$$

$$\Rightarrow \Phi_{15}(X) = \frac{X^{15}-1}{\Phi_1(X)\,\Phi_3(X)\,\Phi_5(X)}$$

$$= \frac{X^{15}-1}{(X-1)\cdot\frac{(X^3-1)}{(X-1)}\cdot\frac{(X^5-1)}{(X-1)}}$$

$$= \frac{(X^{15}-1)(X-1)}{(X^3-1)(X^5-1)}$$

$$= \frac{X^{16}-X^{15}-X+1}{X^8-X^5-X^3+1}$$

Polynomdivision:

$$(x^{16} - x^{15} - x + 1) = (x^8 - x^5 - x^3 + 1) \cdot (x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

$$\underline{x^{16} - x^{13} - x^{11} + x^8}$$

$$-x^{15} + x^{13} + x^{11} - x^8 - x + 1$$

$$\underline{-x^{15} + x^{12} + x^{10} - x^7}$$

$$x^{13} - x^{12} + x^{11} - x^{10} - x^8 + x^7 - x + 1$$

$$\underline{x^{13} \qquad - x^{10} - x^8 + x^5}$$

$$-x^{12} + x^{11} \qquad + x^7 - x^5 - x + 1$$

$$\underline{-x^{12} \qquad + x^9 \qquad + x^7 - x^4}$$

$$x^{11} - x^9 \qquad - x^5 + x^4 - x + 1$$

$$\underline{x^{11} \qquad - x^8 - x^6 + x^3}$$

$$-x^9 + x^8 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x + 1$$

$$\underline{-x^9 \qquad + x^6 \qquad + x^4 \qquad - x}$$

$$x^8 \qquad - x^5 \qquad - x^3 \qquad + 1$$

Also:

$$\Phi_{15}(X) = X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$$

Bem $\Phi_{105}(X)$ hat Koeffizient -2 bei X^{41} und bei X^7

Es sind also nicht alle Koeffizienten von Kreisteilungspolynomen in $\{-1, 0, +1\}$ enthalten.