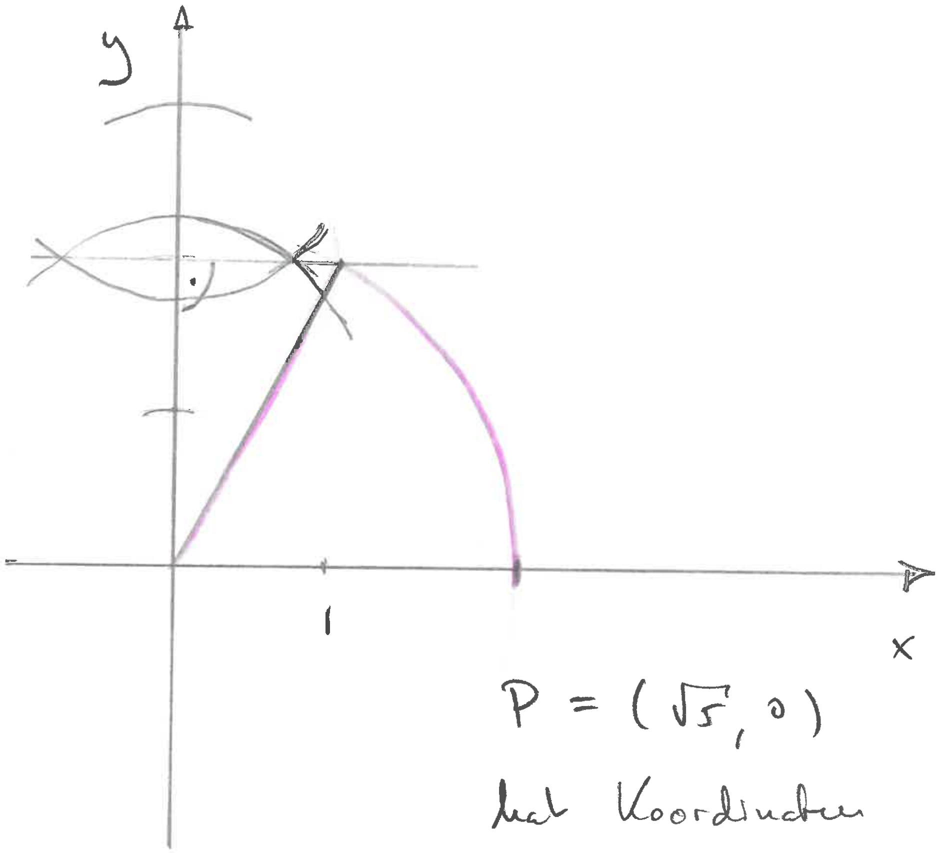
Bsp



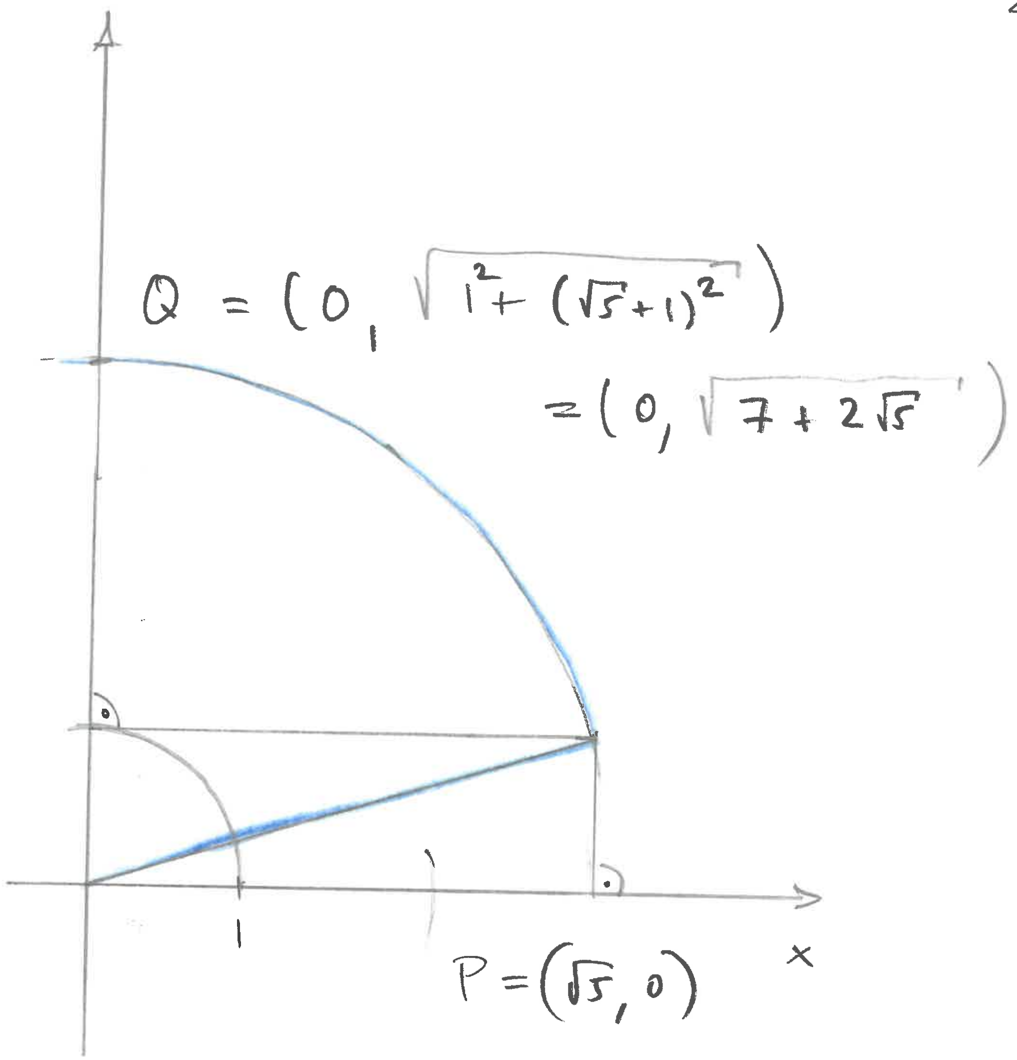
$P = (\sqrt{5}, 0)$

hat Koordinaten

in Erweiterung von Grad 2

von $\mathbb{Q}$, nämlich

in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$



Q hat Koordinaten in Erweiterung von Grad 2 von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, nämlich in

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right)$$

Wir haben

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right) \mid \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \mid \mathbb{Q}$$

Es ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$,

da $\mu_{\sqrt{5},\mathbb{Q}}(X) = X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

Es ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{7+2\sqrt{5}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2$,

da $\mu_{\sqrt{7+2\sqrt{5}},\, \mathbb{Q}(\sqrt{5})}(X)$

$$= X^2 - (7+2\sqrt{5})$$

$$\in \mathbb{Q}(\sqrt{5})[X]:$$

Dazu ist zu zeigen, daß

$$X^2 - (7+2\sqrt{5})$$

von minimalem Grad ist mit Nullstelle $\sqrt{7+2\sqrt{5}}$ und normiert.

29.06.21 - 4

Wir haben also

$$\sqrt{7+2\sqrt{5}} \overset{!}{\notin} \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \text{ zu}$$

zeigen.

Annahme, $\sqrt{7+2\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$(a+b\sqrt{5})^2 = 7+2\sqrt{5},$$

also mit

$$(a^2+5b^2) + 2ab\sqrt{5} = 7+2\sqrt{5}$$

Also:

$$a^2+5b^2 = 7$$
$$ab = 1$$

Also: $b = a^{-1}$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 5a^{-2} = 7$$

$$\Rightarrow \quad a^4 - 7a^2 + 5 = 0$$

Sei $x := a^2$. Es ist $x \in \mathbb{Q}$.

Also $x^2 - 7x + 5 = 0$.

Also $x = \frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 5}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{29}\right).$$

Aber bekanntermaßen:

$$\sqrt{29} \notin \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \quad x \notin \mathbb{Q}.$$

↯

Haben nun

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{7+2\sqrt{5}}) : \mathbb{Q}]$$

$$= [\mathbb{Q}(\sqrt{7+2\sqrt{5}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$$

$$= 2 \cdot 2 = 4$$

Bsp $X^4 - 12 \in \mathbb{Q}[X]$

ist irreduzibel:

- 3 ist prim
- $a_k \equiv_3 0$ für $k \in [0,3]$
- $a_0 = -12 \not\equiv_{3^2} 0$ also $v_3(a_0) = 1$