Bsp Es gibt keine einfache Gruppe von Ordnung 12:

Annahme, G sei eine einfache Gruppe von Ordnung $12 = 2^2 \cdot 3^1$.

Dann gilt:

- $|Syl_3(G)| \equiv_3 1$
- $|Syl_3(G)|$ teilt $\frac{|G|}{3^1} = 2^2$.

Also $|Syl_3(G)| \in \{1, 4\}$.

Da G als einfache Gruppe keine normale 3-Sylowgruppe haben kann, da eine solche ein Normalteiler $\notin \{1, G\}$

wäre, folgt:

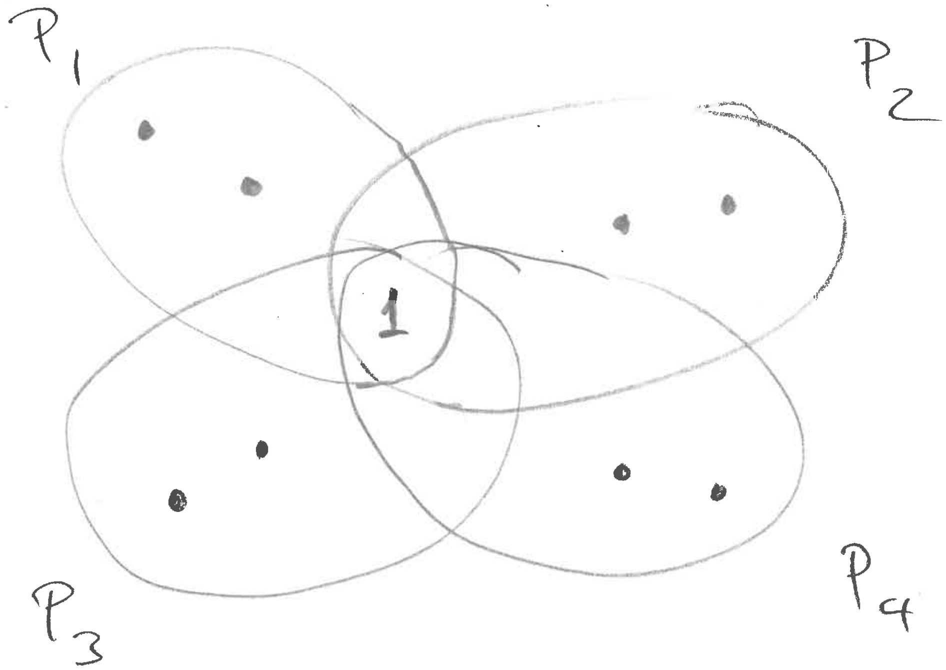
$$|\mathrm{Syl}_3(G)| = 4.$$

Also $\mathrm{Syl}_3(G) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

Da $P_i \neq P_j$ für $i, j \in [1, 4]$

mit $i \neq j$, ist dieserfalls

$P_i \cap P_j = 1$. Bildlich:



Somit gibt es

$$4 \cdot (3-1) = 8$$

Elemente der Ordnung 3.

Elemente, die als Ordnung eine Potenz von 2 haben, gibt es also höchstens $12 - 8 = 4$.

Jede 2-Sylowgruppe in G hat Ordnung 4.

Gäbe es mehr als eine 2-Sylowgruppe in G, dann gäbe es mehr als 4 Elemente in G, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist. Dies ist nicht der Fall.

Also $|Syl_2(G)| = 1$,

Also hat G eine normale 2-Sylowgruppe. Diese hat Ordnung 4. Wegen G einfach ist dies aber ein Widerspruch.

Bsp Es hat $\mathbb{Q}$ keinen Teilkörper K mit $K \subset \mathbb{Q}$.

Annahme, doch. Dann:

$1 \in K \Rightarrow 1+1+\ldots+1 \in K$

$\Rightarrow -(1+1+\ldots+1) \in K$

$\Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq K$

Sei $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^\times$.

Dann sind $a \in K$, $b \in K^\times$.

Also ist auch $b^{-1} \in K^\times$.

Somit ist auch

$$\frac{a}{b} = \underbrace{a}_{\in K} \cdot \underbrace{b^{-1}}_{\in K^\times} \in K.$$

Also ist $\mathbb{Q} \subseteq K$.

Somit ist $K = \mathbb{Q}$. ↯

<u>Bsp</u> Sei p prim.

Es hat $\mathbb{F}_p$ $(= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

keinen Teilkörper K

mit $K \subset \mathbb{F}_p$.

<u>Annahme</u> doch. Dann:

$1 \in K \Rightarrow \sum_{i \in [1, a]} 1 \in K$

für $a \in [1, p-1]$

$\Rightarrow \mathbb{F}_p \subseteq K \Rightarrow K = \mathbb{F}_p$ ↯