Bsp

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$

Wir wollen invertierbare Matrizen $S \in GL_3(\mathbb{Z})$, $T \in GL_3(\mathbb{Z})$ so finden, daß

$$SAT = D$$

eine Diagonalmatrix ist.

Genauer, es soll dann

ein $k \in [0, \min\{3, 3\}] = [0, 3]$ ...

14.06.21-2

.. geben mit

$$SAT = D = \sum_{i \in [1,k]} x_i e_{i,i}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_k & \\ & & & \\ \end{pmatrix}$$

und mit $(x_1) \supseteq \ldots \supseteq (x_k)$,

d.h. mit $x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_k$

Wir formen um, indem wir ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren oder indem wir Zeilen vertauschen.

Genauso für Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(-) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots$$

14.06.21-4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (-) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(-) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} (-) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (-) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}(-)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

wird

$$SAT = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$