Bsp. In S_5 wird

$$(1,2)\circ(1,3,2,4,5)\circ(1,2)$$

$$= {}^{(1,2)}(1,3,2,4,5) = (2,3,1,4,5)$$

$$= (1,4,5,2,3)$$

- In S_5 wird $(1,3,2,4,5)\circ(1,2)\circ(1,5,4,2,3)$

$$= {}^{(1,3,2,4,5)}(1,2) = (3,4)$$

Bsp

- Sei $n \geq 2$. Wir wollen $|A_n|$ bestimmen.

Es ist

$$A_n \overset{\text{Def.}}{=} \operatorname{Kern}\Big(\operatorname{sgn} : S_n \to \underbrace{\{-1,+1\}}_{U(\mathbb{Z})}\Big)$$

Es ist $\operatorname{sgn}((1,2)) = -1$.

Also ist sgn surjektiv.

Situation:

$$A_n \hookrightarrow S_n \xrightarrow[\text{surjektiv}]{\operatorname{sgn}} \{-1,+1\}$$

Dann: $|S_n| = |A_n| \cdot |\{-1,+1\}|$.

Also: $n! = |A_n| \cdot 2$

D.h.: $|A_n| = \frac{1}{2} n!$

Bsp: $|A_2| = 1$, $|A_3| = 3$,

$|A_4| = 12$, $|A_5| = 60$

- Sei $n \geq 1$. Sei $p \geq 2$ prim.

Wir wollen $|SL_n(\mathbb{F}_p)|$ bestimmen.

Es ist ...

.. $SL_n(\mathbb{F}_p) \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{Kern}(\det : GL_n(\mathbb{F}_p) \to U(\mathbb{F}_p))$

Es gilt $\det \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = x$

für $x \in U(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^{\times}$, und also

ist det surjektiv.

Situation:

$$SL_n(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p) \xrightarrow[\text{surjektiv}]{\det} U(\mathbb{F}_p)$$

Dann:

$$|GL_n(\mathbb{F}_p)| = |SL_n(\mathbb{F}_p)| \cdot |U(\mathbb{F}_p)|$$

Also:

$$|SL_n(\mathbb{F}_p)| = |U(\mathbb{F}_p)|^{-1} \cdot |GL_n(\mathbb{F}_p)|$$

$$= \frac{1}{p-1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)$$

Bsp

Sei $G := S_3$,

Sei $U := \langle (1,2) \rangle \leq G$

Sei $N := \langle (1,2,3) \rangle \trianglelefteq G$

Es ist $U \cap N \leq U$

und $U \cap N \leq N$,

also $|U \cap N|$ ein Teiler

von $|U|$ und von $|N|$.

Folglich ist $|U \cap N| = 1$

(was man auch direkt sehen kann).

Es folgt $|UN| = \dfrac{|U|\,|N|}{|U \cap N|}$

$= \dfrac{2 \cdot 3}{1} = 6$.

Also ist $UN = G$.

Ferner ist

$$U \simeq U/\underbrace{U \cap N}_{=1} \simeq UN/N = G/N$$

Da U zyklisch von Ordnung 2 ist, ist auch G/N zyklisch von Ordnung 2. (Was wir aus Bsp. 105.(2) schon wissen.)