Bsp Es ist

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Q}^\times \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{Q})$$

ein Normalteiler:

- Untergruppe: $1_{GL_2(\mathbb{Q})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z$,

  und für $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in Z$

  ist auch $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} xy^{-1} & 0 \\ 0 & xy^{-1} \end{pmatrix} \in Z$

- $Zg = gZ$ für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned} Zg &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Q}^\times \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Q}^\times \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Q}^\times \right\} = gZ \end{aligned}$$

Sei $PGL_2(\mathbb{Q}) := GL_2(\mathbb{Q}) / Z$,

(engl: projective general linear group)

Also:

$$PGL_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z \;:\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) \right\}.$$

Und
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d \end{pmatrix} Z$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z \ni \begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\, x \in \mathbb{Q}^\times \text{ mit } \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d \end{pmatrix}$$

Z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

$$\underset{\text{repräsentantenweise Multiplikation}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z \underset{\text{gleiche Nebenklasse}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

Bsp

Sei $G = \langle \underbrace{(1,2,3,4,5,6)}_{=: g} \rangle \leq S_6$

Also: $G = \{g^0, g^1, \ldots, g^5\}$

und $g^6 = 1$ und $|G| = 6$

Wir haben den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g^i & \longmapsto & g^{2i} \end{array}, \text{ wobei } i \in \mathbb{Z}$$

Denn: $\varphi(g^i g^j)$

$$= \varphi(g^{i+j}) = g^{2(i+j)}$$

$$= g^{2i} \cdot g^{2j} = \varphi(g^i) \cdot \varphi(g^j)$$

für $i, j \in \mathbb{Z}$.

Es 17

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ g^i : i \in [0,5], \; \varphi(g^i) = 1 \}$$

$$= \{ g^i : i \in [0,5], \; g^{2i} = 1 \}$$

$$= \{ g^i : i \in [0,5] \; 2i \equiv_6 0 \}$$

$$= \{ g^0, g^3 \}$$

$$= \langle g^3 \rangle \trianglelefteq G$$

<u>Bsp</u> Es sind

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) : a, d \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) : a, d \in \mathbb{Q}^\times \right\}$$

Untergruppen von $GL_2(\mathbb{Q})$:

$$V \leq U \leq GL_2(\mathbb{Q}).$$

Wir haben den Gruppenmorphismus

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

~~Denn:~~ Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} \in U$.

Dann: $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}\right) = \ldots$

$$\ldots = \varphi\left(\begin{pmatrix} a\tilde{a} & a\tilde{b}+b\tilde{d} \\ 0 & d\tilde{d} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a\tilde{a} & 0 \\ 0 & d\tilde{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}\right)$$

Es ist

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in U : \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = 1_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in U : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U : b \in \mathbb{Q} \right\}$$

$\trianglelefteq U$; vgl. 11.05.21-4

Bsp Sei $p \geq 2$ prim.

Wir haben nach Bsp 109.(2) den injektiven Gruppenmorphismus

$$P : S_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$$

Also ist $P(S_n) \leqslant GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Nach Satz von Lagrange ist also

$$n! = |S_n| = |P(S_n)|$$

ein Teiler von

$$|GL_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - p^0)(p^n - p^1) \cdot \ldots \cdot (p^n - p^{n-1})$$

Falls nun $n < p$ ist, folgt wegen $ggT(n!, p) = 1$:

$n!$ teilt $(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(p^1-1)$

Sei $f(n,p) := \dfrac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(p^1-1)}{n!}$

Es ist also $f(n,p) \in \mathbb{Z}$, falls $n < p$.

Tabelle einiger Werte für $f(n,p)$:

$n \setminus p$	2	3	5	7	11
1	1	2	2^2	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 5$
2		2^3	$2^4 \cdot 3$	$2^4 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
3			$2^6 \cdot 31$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 19$	$2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$
4			$2^8 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 31$	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 19$	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 61$
5				$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 2801$	$2^7 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 3221$
6				$2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 19^2 \cdot 43 \cdot 2801$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 3221$
7					$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 3221 \cdot 45319$