Bsp Sei $R = \mathbb{Q}[X,Y] := \mathbb{Q}[X][Y]$.

Es ist

$$I := (X^2, Y) = \{ a(X,Y) \cdot X^2 + b(X,Y) \cdot Y : a(X,Y), b(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y] \} \trianglelefteq \mathbb{Q}[X,Y].$$

Es ist z.B.

$$X^2 + XY + Y^3 \in (X^2, Y) = I,$$

aber

$$X \notin (X^2, Y) = I,$$

letzteres, da

$$X \overset{!}{=} a(X,Y)X^2 + b(X,Y)Y$$

unlösbar ist.

Es kann I nicht als von einem Element erzeugt geschrieben werden:

Annahme doch. Dann ist

$$I = (u(X,Y)).$$

Insbesondere gibt es ein

$c(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$ mit

$$X^2 = c(X,Y) \cdot u(X,Y)$$

und ein

$d(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$ mit

$$Y = d(X,Y) \cdot u(X,Y)$$

Also darf $u(X,Y)$ weder einen Term $X^k Y^\ell$ mit $\ell \geq 1$ noch einen mit $k \geq 1$ enthalten, muß also konstant sein:

$$u(X,Y) = v \in \mathbb{Q}^\times.$$

Aber $v \notin I$, da

$$v = a(X,Y) \cdot X^2 + b(X,Y) \cdot Y$$

unlösbar ist. $\lightning$

Bsp Es ist $\mathbb{Q}[X,Y]$ kein Hauptidealbereich. Denn im vorigen Beispiel wurde nachgerechnet, daß z. B.

das Ideal $I = (X^2, Y)$ nicht von einem Element erzeugt werden kann, d.h. daß $I = (X^2, Y)$ kein Hauptideal ist.