<u>Bsp</u> Nullstellen in $\mathbb{Q}$ von

$$f(X) := X^3 + X^2 + 2X + 2$$

Teiler von 2: $-2, -1, 1, 2$

Für $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ist $f(t) > 0$.

Also sind -2 und -1 die einzigen Kandidaten. Wir erhalten:

$$f(-2) = -8 + 4 - 4 + 2 = -6$$

$$f(-1) = -1 + 1 - 2 + 2 = 0$$

Also ist -1 die einzige Nullstelle von $f(X)$ in $\mathbb{Q}$.

(Es wird: $f(X) = (X+1)(X^2+2)$.

Folglich sind $i\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ die weiteren Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Bsp (1) In $\mathbb{Z}$ ist

$$3 \equiv_2 5 \equiv_4 1,$$

also $3 \equiv_2 1$.

(2) In $\mathbb{Q}[X]$ ist

$$X^2 + X^3 \equiv_X 0$$

und

$$X^2 \equiv_{X-1} 1$$

Bsp

(1) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0+3\mathbb{Z},\ 1+3\mathbb{Z},\ 2+3\mathbb{Z}\}$

$\overset{\text{Konv.}}{=} \{0,\ 1,\ 2\}$

(+)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

(·)	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

"field"

Man schreibt auch $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Es ist auch

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{-1,\ 0,\ 1\},$$

da $-1 = 2$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

20.04.21 – 4

(2) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0+6\mathbb{Z},\ 1+6\mathbb{Z},\ 2+6\mathbb{Z},\ 3+6\mathbb{Z},\ 4+6\mathbb{Z},\ 5+6\mathbb{Z}\}$

$\overset{\text{Konv.}}{=} \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

(+)	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

(·)	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

1 taucht nicht auf

$\Rightarrow$ $4 \cdot x = 1$ unlösbar, obwohl

$4 \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kein Körper

Bem: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

auch richtig, da $-2 = 4$ und

$-1 = 5$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$