Bsp:

Sei

$$\mathbb{Q}(i) := \{a + bi \; : \; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$\subseteq \mathbb{C}$$

Es ist $\mathbb{Q}(i)$ ein Teilring von $\mathbb{C}$:

- Es ist $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0 \cdot i \in \mathbb{Q}(i)$
- Es ist $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{Q}(i)$
- Für $a + bi, \; c + di \in \mathbb{Q}(i)$ ist auch

$$(a + bi) - (c + di)$$

$$= \underbrace{(a - c)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(b - d)}_{\in \mathbb{Q}} i \in \mathbb{Q}(i)$$

- Für $a+bi$, $c+di \in \mathbb{Q}(i)$ ist auch

$$(a+bi)\cdot(c+di) = \underbrace{(ac-bd)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(ad+bc)}_{\in \mathbb{Q}} i$$

$$\in \mathbb{Q}(i)$$

Es ist $\mathbb{Q}(i)$ sogar ein Körper: Ist $a+bi \in \mathbb{Q}(i)^\times$, dann ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, also $a^2+b^2 > 0$, und somit haben wir zu $a+bi$ das Inverse

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}(i).$$

<u>Bsp</u> $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$

$\subseteq \mathbb{C}$

ist ein Teilring.

Wir wollen die Teilmenge $U(\mathbb{Z}[i])$ der Einheiten in $\mathbb{Z}[i]$ bestimmen.

Das Inverse zu $a+bi \in \mathbb{Z}[i]^\times$ existiert in $\mathbb{Z}[i]$ genau dann, wenn

$$\frac{a-bi}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z}[i]$$

liegt.

Falls $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, dann gilt: $|a| < a^2 \leq a^2+b^2$

Diesenfalls ist $\frac{a}{a^2+b^2} \notin \mathbb{Z}$.

Falls $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, +1\}$, dann gilt: $|b| < b^2 \leq a^2+b^2$,

Diesenfalls ist $\frac{-b}{a^2+b^2} \notin \mathbb{Z}$

Somit ist

$$U(\mathbb{Z}[i]) \subseteq \{ a+bi : a, b \in \{-1, 0, 1\} \}$$

Durchtesten aller Fälle liefert:

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$$