Die projektiven Ebenen über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ und ihre Standardeinbettungen

W. Kühnel

Die im Titel genannten Symbole $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ bezeichnen die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen sowie die Cayley-Zahlen (auch Oktaven genannt). Die projektiven Ebenen über diesen spielen eine besondere Rolle in der Mathematik, und zwar in verschiedenen Bereichen einschließlich Topologie und Algebra, insbesondere auch Lie-Gruppen. Die Standardeinbettung in euklidische Räume spielt eine wichtige Rolle in der Differentialgeometrie. Außerdem ist diese Standardeinbettung vielleicht der einfachste Zugang zu einem globalen Verständnis dieser Objekte mit ihrer Topologie und der Polarität zwischen Punkten und Geraden. Auch der Fahnenraum lässt sich so am einfachsten geometrisch beschreiben und tritt als ein wohlbekanntes Objekt der Differentialgeometrie von Untermannigfaltigkeiten auf.

1. Punkte und Geraden von projektiven Ebenen:

Ganz allgemein kann man die projektive Ebene $\mathbb{K}P^2$ über einem (Schief-)Körper $\mathbb{K}$ als Punktmenge wahlweise auffassen als

- die Menge der Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{K}^3$, also die Menge der 1-dimensionalen linearen Unterräume;
- die affine Zahlenebene $\mathbb{K}^2$ zusammen mit einer (projektiven) Ferngeraden (im Unendlichen), wobei jeder Familie paralleler Geraden genau ein Fernpunkt entspricht. Eine projektive Gerade wiederum ist die um einen Fernpunkt $\{\infty\}$ erweiterte affine Zahlengerade $\mathbb{K}$:
- die Menge aller Vektoren $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ modulo der Äquivalenzrelation $\sim$, wobei $(x, y, z) \sim (x\lambda, y\lambda, z\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Jede der so erklärten Äquivalenzklassen bezeichnet man vielfach als $[x, y, z]$ und nennt dann x, y, z die *homogenen Koordinaten* des betreffenden Punktes;

- im Falle von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ als die (euklidische) Einheitssphäre in den euklidischen Vektorräumen $\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6, \mathbb{H}^3 \cong \mathbb{R}^{12}$ modulo derselben Äquivalenzrelation $\sim$ wie oben, wobei $|\lambda| = 1$. Die Äquivalenzklassen heißen auch *Hopf-Fasern*, weil ihre Gesamtheit eine Faserung (insbesondere also eine disjunkte Zerlegung) der Sphäre S^2, S^5, S^{11} in (Groß-)Sphären vom Typ S^0, S^1, S^3 beschreibt. Die klassische Hopf-Faserung ist die von S^3 nach S^2 mit Fasern vom Typ S^1, als Kurzbezeichnung: $S^1 \to S^3 \to S^2$.

Auf der so definierten projektiven Ebene (als Punktmenge) gibt es dann verschiedene Strukturen, z.B. eine Topologie, die Struktur einer Mannigfaltigkeit bzw. eines homogenen Raumes, eine metrische Struktur und eine ausgezeichnete Menge von Teilmengen als *projektive Geraden* mit der Punkt-Gerade-Inklusion (auch *Inzidenz* genannt). Die Menge aller Paare (Punkt,Gerade), bei denen der Punkt auf der Geraden liegt, heißt der *Fahnenraum* der betreffenden projektiven Ebene. Verschiedene Gruppen operieren dann so auf einer projektiven Ebene, dass diese Strukturen jeweils bewahrt werden.

Die Topologie ist genau die Quotiententopologie bei der o.g. Quotientenkonstruktion nach $\sim$ (oder der Hopf-Faserung), induziert von einer Topologie auf $\mathbb{K}$ (die freilich gegeben sein muss). Im Falle von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist das die Standardtopologie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$. In diesen Fällen ist dann auch die Mannigfaltigkeits-Struktur durch die betreffende Faserung

$$S^0 \to S^2 \to \mathbb{R}P^2, \quad S^1 \to S^5 \to \mathbb{C}P^2, \quad S^3 \to S^{11} \to \mathbb{H}P^2$$

induziert. Diese Faserungen werden dann Submersionen, also differenzierbare Abbildungen von maximalem Rang.

Eine metrische Struktur ergibt sich durch die sogenannten *Standardeinbettungen* von $\mathbb{R}P^2, \mathbb{C}P^2, \mathbb{H}P^2$ (und dann auch der Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$) in die euklidischen Sphären S^4, S^7, S^{13} (bzw. S^{25} im Fall der Cayley-Ebene). Die Standardeinbettung wird unten in Abschnitt 2 näher erklärt. Sie beschreibt jeden Punkt durch eine bestimmte quadratische Matrix.

Die Menge der projektiven Geraden ist in den obigen Fällen (alternativ) gegeben durch

- die Menge der Ebenen durch den Ursprung in $\mathbb{K}^3$, also die Menge der 2-dimensionalen linearen Unterräume;

- die Menge aller (affinen) Geraden im $\mathbb{K}^2$ (jeweils um einen Fernpunkt erweitert), zusammen mit der Ferngeraden selbst;

- die Menge aller Linearkombinationen zweier linear unabhängiger Vektoren modulo derselben Äquivalenzrelation $\sim$ wie oben. In homogenen Koordinaten x, y, z ist eine projektive Gerade als Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung $ax + by + cz = 0$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ beschrieben;

- im Falle von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ als die Menge der reellen, komplexen bzw. quaternionalen "Großkreise" in 2-dimensionalen $\mathbb{K}$-Ebenen (also reellen Sphären S^1, S^3, S^7) modulo derselben Äquivalenzrelation $\sim$ wie oben. Bei den Standardeinbettungen treten die projektiven Geraden zusätzlich auf als diejenigen Punktmengen, die von einem fest, aber beliebig gewählten Punkt maximalen Abstand haben (in der Riemannschen Geometrie heißt das der *Schnittort* des betreffenden Punktes). Jede projektive Gerade ist dann eine runde Sphäre S^1, S^2, S^4 (bzw. S^8 bei der Cayley-Ebene) von einem gewissen Radius.

Dabei liegen je zwei verschiedene Punkte stets in genau einer projektiven Geraden, und je zwei verschiedene projektive Geraden schneiden sich in genau einem Punkt. Falls $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper mit k Elementen ist, so hat die projektive Ebene genau $k^2 + k + 1$ Punkte und ebenso viele Geraden. Jede Gerade hat ihrerseits genau $k + 1$ Punkte, und jeder Punkt liegt auf ebenso vielen Geraden. Die Zahl k heißt dann auch die *Ordnung* der projektiven Ebene.

2. Die Standardeinbettung der projektiven Ebene über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$:

Es bezeichne $\mathbb{K}$ einen der (Schief-)körper $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und es bezeichne X die Einheitssphäre im $\mathbb{K}^3$ (bzw. im $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^6, \mathbb{R}^{12}$), d.h. die Menge aller $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ mit $x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} = 1$ bzw. $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$. Ferner bezeichne F die folgende Abbildung:

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} x\bar{x} & x\bar{y} & x\bar{z} \\ y\bar{x} & y\bar{y} & y\bar{z} \\ z\bar{x} & z\bar{y} & z\bar{z} \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite ist eine $(3, 3)$-Matrix über $\mathbb{K}$, die konjugiert symmetrisch ist. Insbesondere sind die Einträge in der Hauptdiagonalen reell, und die Spur der Matrix ist gleich 1. Wenn man $\mathbf{x}^T = (x, y, z)$ als Zeilenvektor auffasst, dann kann man F auch kurz durch das Matrizenprodukt

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T$$

beschreiben. Die Bildmenge $F(X)$ kann folglich auch als Teilmenge dieses Matrizenraumes aufgefasst werden. Mit dem Standard-Skalarprodukt wird dieser umgebende Raum ein reeller euklidischer Vektorraum der Dimension 6, 9 bzw. 15 (mit drei Parametern in $\mathbb{K}$ und drei in $\mathbb{R}$), und zwar liegt $F(X)$ in der Hyperebene H, die durch $Spur = 1$ definiert ist.

1. Offensichtlich ist F stetig, also ist der Bildraum $F(X)$ kompakt.

2. Es gilt $F(\mathbf{x}\lambda) = F(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} = (x, y, z) \in X$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$. $\mathbb{K}^3$ wird hier als Rechts-Vektorraum über $\mathbb{K}$ aufgefasst. Dies folgt aus der Gleichung
$$F(\mathbf{x}\lambda) = \mathbf{x}\lambda \cdot \overline{\mathbf{x}\lambda}^T = \mathbf{x}\lambda \cdot \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T = F(\mathbf{x})$$
für alle λ mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Das Symbol $\mathbf{x}$ bezeichnet hier – wie oben – einen Spaltenvektor im $\mathbb{K}^3$.

   Damit bildet F jeweils den gesamten Durchschnitt von X mit einem 1-dimensionalen linearen Unterraum von $\mathbb{K}^3$ in einen festen Punkt ab, es gibt also eine induzierte stetige Abbildung
$$V_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K}P^2 \to F(X)$$
mit $V_{\mathbb{K}}[x, y, z] = F(x, y, z)$.

3. Ferner liefert $V_{\mathbb{K}}$ eine natürliche Bijektion (sogar einen Homöomorphismus) zwischen $\mathbb{K}P^2$ und $F(X)$.

   Beweis: Die Gleichung
$$F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$
folgt direkt aus $\bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 = 1$. Somit ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor der Matrix $F(\mathbf{x})$ zum Eigenwert 1. Analog gilt $F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0$ für jedes $\mathbf{y}$ mit $\bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{y} = 0$. Also verschwindet $F(\mathbf{x})$ auf dem orthogonalen Komplement von $\mathbf{x}$, und folglich beschreibt $F(\mathbf{x})$ die orthogonale Projektion des ganzen Raumes auf die

von $\mathbf{x}$ aufgespannte Gerade. Folglich sind die Bilder $F(\mathbf{x})$ und $F(\mathbf{y})$ dann verschieden, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ verschiedene Geraden aufspannen. Damit steht das Bild $F(X)$ in natürlicher Bijektion zu der Menge aller Geraden im $\mathbb{K}^3$, die durch den Ursprung gehen, und $V_{\mathbb{K}}$ ist injektiv. Die Menge aller betreffenden Projektions-Operatoren bildet eine kompakte Teilmenge des Matrizenraumes, also eines endlich-dimensionalen Vektorraumes über $\mathbb{R}$. Also ist die stetige Bijektion $V_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K}P^2 \to F(X)$ auch stetig in der umgekehrten Richtung und folglich ein Homöomorphismus.

Nach dem Obigen gilt $(F(\mathbf{x}))^2 = F(\mathbf{x})$, also kann man $F(X)$ auch identifizieren mit der Menge aller idempotenten und konjugiert symmetrischen Matrizen mit Spur 1 über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

4. Man kann also $V_{\mathbb{K}}$ als Einbettung auffassen oder, anders ausgedrückt, man kann vermöge $V_{\mathbb{K}}$ die projektive Ebene $\mathbb{K}P^2$ als (topologischen) Unterraum eines euklidischen Raumes auffassen. Diese Einbettung heißt die Standardeinbettung oder die *Einbettung vom Veronese-Typ*. Der zweite Name kommt daher, dass die reelle Standardeinbettung praktisch identisch ist mit der Veronese-Einbettung in der algebraischen Geometrie:

$$P^2 \ni [x, y, z] \mapsto [x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx] \in P^5.$$

Aber bereits im komplexen Fall ist das etwas anders.

5. Darüber hinaus liegt $F(X)$ in einer euklidischen Sphäre der Dimension 4, 7 bzw. 13 mit Radius $\sqrt{2/3}$ in H.

Beweis: Zunächst liegt $F(X)$ in der Einheits-Sphäre im Raum der reellen Dimension 6, 9 bzw. 15, weil

$$1 = (x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})^2 = (x\bar{x})^2 + (y\bar{y})^2 + (z\bar{z})^2 + 2(x\bar{x}y\bar{y}) + 2(x\bar{x}z\bar{z}) + 2(y\bar{y}z\bar{z}).$$

Es ist aber $2(x\bar{x}y\bar{y}) = 2(xy\bar{y}\bar{x}) = 2(x\bar{y}y\bar{x}) = 2x\bar{y}\overline{x\bar{y}} = 2|x\bar{y}|^2 = |x\bar{y}|^2 + |y\bar{x}|^2$ etc. Die Summe aller neun Quadrate der Komponentenbeträge ist also gleich 1. Die Hyperebene H enthält (als nächsten Punkt zum Ursprung) den Punkt $\mathbf{p}$, der durch $\frac{1}{3}$ mal Einheitsmatrix definiert ist. Der Abstand vom Ursprung ist also gleich $\sqrt{1/3}$ (nach der Hesse-Form von H). Der Radius des Durchschnitts von Einheitssphäre und H ist also gleich $\sqrt{2/3}$ (nach Pythagoras).

6. Folglich haben wir Standardeinbettungen

$$\mathbb{R}P^2 \to S^4, \quad \mathbb{C}P^2 \to S^7, \quad \mathbb{H}P^2 \to S^{13}.$$

Genauer wird dadurch zunächst nur der Punktraum der betreffenden projektiven Ebene eingebettet. Die projektiven Geraden derselben finden wir aber auch in geometrischer Weise wieder, zusammen mit einer kanonischen Polarität zwischen Punkten und Geraden, s. Abschnitt 4 unten.

Zusatzbemerkung: Die Antipodenabbildung in der umgebenden Sphäre liefert eine zweite (kongruente) Kopie dieser Standardeinbettung, die in jedem Fall disjunkt zur ersten ist. Es ist ist dann sogar jede ε-Tubenumgebung um die eine gleichzeitig eine δ-Tubenumgebung um die andere. In der Differentialgeometrie treten diese Tubenumgebungen als sogenannte *isoparametrische Hyperflächen* auf, d.h. solche mit konstanten Hauptkrümmungen.

3. Die Standardeinbettung der projektiven Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$:

Die Betrachtungen von Abschnitt 1 kann man analog auch für $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ (Cayley-Zahlen) durchführen, aber nur mit gewissen Modifikationen, weil in $\mathbb{O}$ die Multiplikation nicht mehr assoziativ ist. Wir erhalten dadurch die Standardeinbettung der Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$ in einen 27-dimensionalen reellen Vektorraum von Matrizen (die sogenannte *Jordan-Algebra*) bzw. eine reelle Hyperebene davon bzw. in eine euklidische Sphäre S^{25}.

Die *Cayley-Zahlen* selbst sind eine algebraische Struktur auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathbb{R}^8 = \Big\{ \sum_{i=0}^{7} a_i \mathbf{e}_i \;\Big|\; a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R} \Big\},$$

die durch die gewöhnliche Addition von Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten sowie die folgende Multiplikationstabelle gegeben ist:

$$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_0 \;\text{ für alle }\; i \geq 0,$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_0 \;\text{ für alle }\; i \geq 1,$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$$

für jedes der geordneten Tripel $(i,j,k),(j,k,i),(k,i,j)$ mit

$$(i,j,k) \in \Big\{(1,2,4),(2,3,5),(3,4,6),(4,5,7),(5,6,1),(6,7,2),(7,1,3)\Big\}.$$

Es gilt also z.B. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 = -\mathbf{e}_3,\ \ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_6 = \mathbf{e}_7$.

Durch Fortsetzung auf Linearkombinationen erfüllt die so definierte Multiplikation zusammen mit der Addition die Distributiv-Gesetze, und außerdem gibt es eine eindeutige Division durch jedes von null verschiedene Element, d.h. die Gleichungen $ax = b$ und $xa = b$ sind für jedes b und jedes $a \neq 0$ eindeutig nach x auflösbar, vgl. auch das zitierte Buch von E.Ossa. Die so definierte Multiplikation ist aber nicht assoziativ wegen

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_6, \quad (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_6.$$

Aber für jedes dieser speziellen Tripel (i,j,k) definieren die $\mathbb{R}$-Linearkombinationen von $\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k$ eine assoziative Unteralgebra, die isomorph ist zu den Quaternionen. Man kann daher die Cayley-Zahlen auch auffassen als Paare von Quaternionen, nämlich als

$$\mathbb{O} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \{q_1 + q_2 \cdot \mathbf{e}_3\} \text{ mit } q_1, q_2 \in \mathit{Lin}(\{\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4\}) \cong \mathbb{H}.$$

Man beachte $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_7,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_5,\ \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_6$. Analog kann man ja die Quaternionen als Paare komplexer Zahlen $z + w\cdot\mathbf{j}$ sowie die komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen $a+bi$ auffassen: $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}\oplus\mathbb{C},\ \mathbb{C} \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$. Es ist (analog zu $\mathbb{C},\mathbb{H}$) sinnvoll, das Element $\mathbf{e}_0$ mit der reellen Zahl 1 zu identifizieren.

Wie bei komplexen Zahlen und Quaternionen wird die Konjugation in $\mathbb{O}$ erklärt durch Fixieren von $\mathbf{e}_0 = 1$ sowie durch Ersetzen von $\mathbf{e}_i$ durch $-\mathbf{e}_i$ für $i \geq 1$ und lineare Fortsetzung. Es wird dann $\Big(\sum_{i=0}^7 a_i\mathbf{e}_i\Big)\cdot\Big(\sum_{i=0}^7 a_i\overline{\mathbf{e}}_i\Big) = \sum_{i=0}^7 a_i^2$. Der *Betrag* $|\mathbf{x}|$ einer Cayley-Zahl $\mathbf{x}$ wird definiert als die Quadratwurzel daraus: $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}$. Es folgt sofort $\mathbf{x}^{-1} = |\mathbf{x}|^{-2}\bar{\mathbf{x}}$. Außerdem gilt die Rechenregel $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$.

Es ist leider nicht möglich, die projektive Ebene über den Cayley-Zahlen als die Menge der 1-dimensionalen $\mathbb{O}$-Unterräume von $\mathbb{O}^3$ zu definieren. Ebenso kann man nicht ohne weiteres $(3,3)$-Matrizen auf $\mathbb{O}^3$ in der üblichen Weise operieren lassen. Die Nicht-Assoziativität der Multiplikation schließt die Anwendung der übliche Linearität nach den Gesetzen der linearen Algebra aus. Aber man kann die projektive Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$ auf andere Weise definieren, und zwar einmal als topologischen Raum und dann auch durch eine Standard-Einbettung in einen reell 27-dimensionalen euklidischen Raum.

Die topologische Definition: So wie (rein topologisch) der Punktraum von $\mathbb{C}P^2$ als 4-dimensionaler Ball $B^4 \subset \mathbb{R}^4$ mit einer Ferngeraden $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und der Verheftungsabbildung $h_{\mathbb{C}} \colon \partial B^4 = S^3 \to S^2$ mit $h_{\mathbb{C}}(z,w) = z^{-1}w$ erklärt werden kann, so kann $\mathbb{H}P^2$ als als 8-dimensionaler Ball $B^8 \subset \mathbb{R}^8$ mit einer Ferngeraden $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ und der Verheftungsabbildung $h_{\mathbb{H}} \colon \partial B^8 = S^7 \to S^4$ mit $h_{\mathbb{H}}(q,r) = \bar{q}^{-1}r$ erklärt werden. Die Verheftungsabbildungen sind jeweils die Hopf-Abbildungen. Das gleiche geht nun auch für den 16-dimensionalen Ball $B^{16} \subset \mathbb{R}^{16}$ mit einer Ferngeraden $S^8 = \mathbb{O} \cup \{\infty\}$ und einer Verheftungsabbildung $h_{\mathbb{O}} \colon \partial B^{16} = S^{15} \to S^8$. Dabei setzen wir $h_{\mathbb{O}}(x,y) = x^{-1}y$. Die projektive Cayley-Ebene wird also definiert als ein abgeschlossener Ball B^{16} modulo der durch $h_{\mathbb{O}}$ induzierten Äquivalenzrelation auf dem Rand S^{15}, d.h. zwei Punkte $x, y \in S^{15}$ werden genau dann identifiziert, wenn $h_{\mathbb{O}}(x) = h_{\mathbb{O}}(y)$ gilt. Die Faser besteht jeweils aus den Cayley-Zahlen mit Betrag 1, also einer 7-Sphäre. Die Topologie ist die Quotiententopologie. Im Sinne der projektiven Geometrie denken wir uns das Innere des Balles als die Punkte der affinen Ebene und den Quotienten des Randes als die Punkte der projektiven Ferngeraden.

Die Standardeinbettung $\mathbb{O}P^2 \to \mathbb{R}^{27}$: Wir würden gerne die oben definierte Abbildung

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x\bar{x} & x\bar{y} & x\bar{z} \\ y\bar{x} & y\bar{y} & y\bar{z} \\ z\bar{x} & z\bar{y} & z\bar{z} \end{pmatrix}$$

auch auf die Cayley-Ebene beziehen, d.h. auf alle $x, y, z \in \mathbb{O}$ mit $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$. Leider gilt aber die Gleichung $F(\mathbf{x}\lambda) = F(\mathbf{x})$ nicht mehr für jedes $\mathbf{x} = (x, y, z) \in X \cong S^{23} \subset \mathbb{O}^3$ und jedes $\lambda \in \mathbb{O}$ mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Dies liegt an der fehlenden Assoziativität der Multiplikation, vgl. den obigen Beweis der Gleichung in den anderen Fällen. Falls aber x, y, z in einer gemeinsamen assoziativen Unteralgebra liegen (z.B. in einer der Versionen der Quaternionen oben), dann gilt die Gleichung sehr wohl für alle λ, die in derselben Unteralgebra enthalten sind. Diese Betrachtungsweise macht deshalb Sinn, weil wir in $\mathbb{C}P^2$ und $\mathbb{H}P^2$ jeden Punkt in homogenen Koordinaten so beschreiben können, dass die Koordinate x reell wird. Wenn wir uns das auch für die Cayley-Ebene vorstellen, dann liegen x, y, z in einer gemeinsamen assoziativen Unteralgebra, denn je zwei Cayley-Zahlen y, z liegen in einer solchen. Die reellen Zahlen sind dann automatisch mit enthalten. Also können wir einen Raum $\mathbb{P}$ definieren als die Menge aller Matrizen vom Typ

$$A = \begin{pmatrix} x\bar{x} & x\bar{y} & x\bar{z} \\ y\bar{x} & y\bar{y} & y\bar{z} \\ z\bar{x} & z\bar{y} & z\bar{z} \end{pmatrix}$$

mit Cayley-Zahlen x, y, z, die in einer gemeinsamen assoziativen Unteralgebra enthalten sind und die $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$ erfüllen, was gerade bedeutet, dass $Spur(A) = 1$ ist. Ferner folgt sofort, dass jede solche Matrix A idempotent ist, d.h. es gilt $A^2 = A$. Der umgebende Raum J aller konjugiert symmetrischen $(3, 3)$-Matrizen über den Cayley-Zahlen

$$B = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x_2} \\ \bar{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{O}$ ist ein reeller 27-dimensionaler Vektorraum mit der euklidischen Norm

$$||B||^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 2|x_3|^2 = Spur(B^2).$$

Somit gilt $\mathbb{P} \subset J$ als Unterraum eines euklidischen Raumes, wodurch nicht nur die Topologie auf $\mathbb{P}$ bestimmt wird, sondern auch metrische Verhältnisse (z.B. eine Abstandsmetrik).

Wir können anmerken, dass $\mathbb{P}$ als Unterraum von J durch algebraische Gleichungen definiert wird. Dies sind die Gleichungen

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1,$$

$$\begin{array}{rcl} |x_1|^2 & = & \xi_2\xi_3, \\ |x_2|^2 & = & \xi_3\xi_1, \\ |x_3|^2 & = & \xi_1\xi_2, \\ x_1x_2 & = & \xi_3\bar{x_3}, \\ x_2x_3 & = & \xi_1\bar{x_1}, \\ x_3x_1 & = & \xi_2\bar{x_2}. \end{array}$$

Obwohl J als Raum von Matrizen definiert ist, ist J nicht abgeschlossen gegen das übliche Matrizenprodukt. Stattdessen ist auf J das kommutative *Jordan-Produkt*

$$B \circ C := \tfrac{1}{2}(BC + CB)$$

definiert. Zusammen mit diesem Produkt wird J auch als exzeptionelle Jordan-Algebra bezeichnet. Wegen $B \circ B = B^2$ ist die Idempotenz von Matrizen dieselbe bezüglich der beiden Produkte.

Wie in den Fällen von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist auch $\mathbb{P}$ in der Einheitssphäre in J enthalten und ferner in der 26-dimensionalen Hyperebene H, die durch $Spur = 1$ definiert wird. Dies folgt mit derselben Rechnung wie oben. Also liegt $\mathbb{P}$ in einer euklidischen Sphäre S^{25} vom Radius $\sqrt{2/3}$.

Es fehlt noch der Nachweis, dass das so definierte euklidische Modell $\mathbb{P}$ homöomorph zur oben definierten Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$ ist. Dazu betrachten wir den abgeschlossenen Ball $B^{16} = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{O}, |p|^2 + |q|^2 \leq 1\}$ und die Abbildung $\Phi\colon B^{16} \to \mathbb{P}$, definiert durch

$$\Phi(p,q) = \begin{pmatrix} s^2 & s\bar{p} & s\bar{q} \\ sp & |p|^2 & p\bar{q} \\ sq & q\bar{p} & |q|^2 \end{pmatrix}$$

wobei $s^2 = 1 - |p|^2 + |q|^2$ gesetzt sei und $s \geq 0$. Es gilt dann $\Phi(p,q) \in \mathbb{P}$, und umgekehrt kann jedes $A \in \mathbb{P}$ so dargestellt werden. Dazu muss man für $x \neq 0$ nur das Tripel (x,y,z) durch $(x\lambda^{-1}, y\lambda^{-1}, z\lambda^{-1})$ zu ersetzen mit $\lambda = x/|x|$, denn dann wird die x-Komponente reell, und wir können $p = y\lambda^{-1}, q = z\lambda^{-1}$ setzen. falls $x = 0$ gilt, kann man $p = y, q = z$ setzen. Somit ist Φ eine stetige und surjektive Abbildung von B^{16} auf $\mathbb{P}$, und sie ist injektiv im Inneren $B^{16} \setminus S^{15}$, d.h. dort, wo $s \neq 0$ gilt. Auf dem Rand S^{15} stimmt aber Φ mit der oben erklärten Hopfabbildung $h_{\mathbb{O}}$ überein, denn das Urbild eines festen Punktes $\Phi(p,q)$ besteht aus allen Paaren (rp, rq) mit $|r| = 1$, also derselben 7-Sphäre wie bei der Hopfabbildung. Man überlegt sich leicht, dass die Menge $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}$ aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |p|^2 & p\bar{q} \\ 0 & q\bar{p} & |q|^2 \end{pmatrix}$$

homöomorph zu einer 8-dimensionale Sphäre ist, sozusagen als die projektive Gerade $x = 0$. Damit faktorisiert Φ über den Quotienten nach der Hopfabbildung $h_{\mathbb{O}}$, was eine bijektive und stetige Abbildung $\overline{\Phi}\colon \mathbb{O}P^2 \to \mathbb{P}$ induziert, die wegen der Kompaktheit der beiden Räume ein Homöomorphismus ist.

4. Weitere Eigenschaften der Standardeinbettung:

Ziel dieses Abschnitts ist es, die euklidischen Symmetrien der Standardeinbettungen aufzuzeigen und gleichzeitig - unter Zuhilfenahme derselben - die Menge aller projektiven Geraden als ausgezeichnete Teilmengen der Standardeinbettungen zu beschreiben.

Wir beschreiben hier zuerst den Fall der reellen projektiven Ebene, weil dort alles am einfachsten ist.

1. Offensichtlich identifiziert die obige Abbildung F antipodale Punktepaare auf S^2. Weil jede Gerade aber S^2 in genau einem Punktepaar schneidet, haben verschiedene antipodale Punktepaare verschiedene Bilder unter F (das sieht man auch direkt an den Formeln: $F(x,y,z) = F(x',y',z')$ impliziert $(x,y,z) = \pm(x',y'.z')$). Eingeschränkt auf eine hinreichend kleine (kompakte) Umgebung eines Punktes $\mathbf{x} \in S^2$ ist damit F bijektiv, also homöomorph. somit ist F eine lokal homöomorphe Abbildung von S^2 aufs Bild $F(S^2)$, und zwar global eine zweifache Überlagerung. Die Standardeinbettung $V_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R}P^2 \to F(S^2) \subset S^4$ war schon oben beschrieben worden.

2. Die *Polarität* zwischen Punkten und projektiven Geraden ist im reellen Fall praktisch dieselbe wie die zwischen antipodalen Punktepaaren auf der Sphäre S^2 und den dazwischenliegenden Großkreisen. Es entspricht dabei der Punkt $[1,0,0]$ der dazu polaren projektiven Geraden $x = 0$, allgemein entspricht der Punkt $[x_0, y_0, z_0]$ der dazu polaren projektiven Geraden mit der Gleichung $x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0$.

   Geometrisch ist die Gerade $x = 0$ im Bild unter F ein runder Kreis, weil

   $$F(0,y,z) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & yz \\ 0 & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

   gilt mit $y^2+z^2 = 1$ (was eine Kurve mit einem freien Parameter ist) und weil die (kompakte) Bildmenge im Durchschnitt einer 4-Sphäre mit einem linearen Unterraum der Kodimension 3 enthalten ist (denn drei Koordinaten sind null), also in einem Kreis. Damit muss die Bildmenge mit diesem Kreis übereinstimmen. Wir finden also eine spezielle projektive Gerade als einen runden Kreis in der Standardeinbettung wieder.

3. Um zu zeigen, dass dies für alle anderen projektiven Geraden auch gilt, betrachten wir eine orthogonale Matrix A, die auf S^2 und folglich auch auf $\mathbb{R}P^2$ operiert. Genauer kann man jeden Punkt in jeden anderen drehen. Dies bewahrt die Paare (antipodales Punktepaar, polarer Großkreis). Es ist klar, dass $F(A\mathbf{x})$ ebenfalls in $F(X)$ liegt für jedes $\mathbf{x}$. Für jede orthogonale Matrix A gilt aber

   $$F(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})(A\mathbf{x})^T = A(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)A^T = A \cdot F(\mathbf{x}) \cdot A^T,$$

   und diese Wirkung von A durch Konjugation (beachte $A^T = A^{-1}$) auf dem Raum aller symmetrischen $(3,3)$-Matrizen ist ebenfalls orthogonal, weil das Skalarprodukt bewahrt wird. Dieses Skalarprodukt von symmetrischen Matrizen kann man bekanntlich schreiben als

   $$\Big\langle M_1, M_2 \Big\rangle = \mathrm{Spur}(M_1 \cdot M_2).$$

   Es gilt nun

   $$\Big\langle AM_1A^T, AM_2A^T \Big\rangle = \mathrm{Spur}\big(AM_1A^T \cdot AM_2A^T\big) = \mathrm{Spur}(M_1 \cdot M_2) = \Big\langle M_1, M_2 \Big\rangle.$$

   Betrachten wir nun für festes $\mathbf{x}$ das Skalarprodukt (im Matrizenraum) von $F(\mathbf{x})$ mit einer beliebigen symmetrischen $(3,3)$-Matrix, als "Höhenfunktion" $f_{\mathbf{x}}$, definiert durch $f_{\mathbf{x}}(M) = \Big\langle F(\mathbf{x}), M \Big\rangle$. Für $\mathbf{x} = (1,0,0)$ ist das Bild $F(\mathbf{x})$ die Matrix mit einer 1 links oben und sonst nur Nullen. Es ist klar, dass dann $f_{\mathbf{x}}\big(F(y_1,y_2,y_3)\big) = y_1^2$ gilt mit Maximum bei $y_1 = 1$ (das ist genau der Punkt $F(\mathbf{x})$) und Minimum bei $y_1 = 0$ (das ist genau die dazu polare Gerade). Also tritt bei diesem speziellen Punkt und der dazu polaren Geraden der Punkt als Maximum und die Gerade als Minimum dieser Höhenfunktion auf. Wegen der Wirkung der orthogonalen Gruppe ist dies aber für jeden anderen Punkt genauso, denn die Drehung bewahrt Minima und Maxima, somit auch die Paare (Punkt, polare Gerade). Dies gilt also für alle projektiven Geraden in $\mathbb{R}P^2$, denn jede tritt als polare Gerade gegenüber von einem Punkt auf.

4. Es folgt, dass alle projektiven Geraden unter der Standardeinbettung als euklidische ebene Kreise erscheinen, die gegenüber liegen (so weit wie möglich entfernt) von ihrem jeweiligen polaren Punkt.

Analog ist das im Fall der komplexen bzw. der quaternionalen projektiven Ebene.

1. die Identifikationsabbildung $F\colon S^5 \to \mathbb{C}P^2 \subset S^7$ bzw. $F\colon S^{11} \to \mathbb{H}P^2 \subset S^{13}$ ist schon oben beschrieben worden. Sie ist keine Überlagerung, sondern eine Faserung mit Faser S^2 bzw. S^3.

2. Auch die *Polarität* zwischen Punkten und projektiven Geraden ist in diesen Fällen analog: Es entspricht der Punkt $[x_0, y_0, z_0]$ der dazu polaren projektiven Geraden mit Gleichung $x_0x + y_0y + z_0z = 0$. Geometrisch ist die Gerade $x = 0$ im Bild unter F eine runde Sphäre der Dimension 2 bzw. 4, weil

$$F(0, y, z) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y\bar{y} & y\bar{z} \\ 0 & z\bar{y} & z\bar{z} \end{pmatrix}$$

   gilt mit $y\bar{y} + z\bar{z} = 1$ (was eine komplexe bzw. quaternionale Kurve mit einem freien Parameter ist) und weil die (kompakte) Bildmenge im Durchschnitt einer 7-Sphäre (bzw. 13-Sphäre) mit einem linearen Unterraum der reellen Kodimension 5 (bzw. 9) enthalten ist (denn drei Koordinaten sind null). Damit muss die Bildmenge mit diesem Durchschnitt übereinstimmen. Wir finden also eine spezielle projektive Gerade als eine runde Sphäre in der Standardeinbettung wieder.

3. Um zu zeigen, dass dies für alle anderen projektiven Geraden in $\mathbb{C}P^2$ auch gilt, betrachten wir eine unitäre Matrix A, die auf $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ und folglich auch auf $\mathbb{C}P^2$ operiert. Genauer kann man jeden Punkt in jeden anderen durch eine solche Matrix drehen. Dies bewahrt auch die Paare (antipodales Punktepaar, polarer Großkreis). Es ist klar, dass $F(A\mathbf{x})$ ebenfalls in $F(X)$ liegt für jedes $\mathbf{x}$. Für jede unitäre Matrix A gilt aber

$$F(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})\overline{A\mathbf{x}}^T = A(\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}^T)\bar{A}^T = A \cdot F(\mathbf{x}) \cdot \bar{A}^T,$$

   und diese Wirkung von A durch Konjugation (beachte $\bar{A}^T = A^{-1}$) auf dem Raum aller konjugiert symmetrischen $(3,3)$-Matrizen ist ebenfalls skalarprodukterhaltend, mit dem Hermiteschen Skalarprodukt

$$\Big\langle M_1, M_2 \Big\rangle = \mathrm{Spur}(M_1 \cdot M_2).$$

   Es gilt nämlich

$$\Big\langle AM_1A^{-1}, AM_2A^{-1} \Big\rangle = \mathrm{Spur}\big(AM_1A^{-1} \cdot AM_2A^{-1}\big) = \mathrm{Spur}(M_1 \cdot M_2) = \Big\langle M_1, M_2 \Big\rangle.$$

Betrachten wir nun für festes $\mathbf{x}$ das Skalarprodukt (im Matrizenraum) von $F(\mathbf{x})$ mit einer beliebigen symmetrischen $(3,3)$-Matrix, als "Höhenfunktion" $f_{\mathbf{x}}$, definiert durch $f_{\mathbf{x}}(M) = \big\langle F(\mathbf{x}), M \big\rangle$. Für $\mathbf{x} = (1,0,0)$ ist das Bild $F(\mathbf{x})$ die Matrix mit einer 1 links oben und sonst nur Nullen. Es ist klar, dass dann $f_{\mathbf{x}}\big(F(y_1,y_2,y_3)\big) = y_1\bar{y}_1$ gilt mit Maximum bei $y_1 = 1$ (das ist genau der Punkt $F(\mathbf{x})$) und Minimum bei $y_1 = 0$ (das ist genau die dazu polare Gerade). Also tritt bei diesem speziellen Punkt und der dazu polaren Geraden der Punkt als Maximum und die Gerade als Minimum dieser Höhenfunktion auf. Wegen der Wirkung der unitären Gruppe ist dies aber für jeden anderen Punkt genauso, denn die Drehung bewahrt Minima und Maxima, somit auch die Paare (Punkt, polare Gerade). Dies gilt also für alle projektiven Geraden in $\mathbb{C}P^2$, denn jede tritt als polare Gerade gegenüber von einem Punkt auf.

In $\mathbb{H}P^2$ ist das alles genauso, wenn wir die unitäre Gruppe $U(3)$ durch die symplektische Gruppe $Sp(3)$ ersetzen, die die quaternionale Struktur bewahrt, sowie das Hermitesche Skalarprodukt durch das symplektische, das analog definiert ist (mit der quaternionalen Konjugation statt der komplexen). Dabei gibt es Inklusionsabbildungen $Sp(3) \to U(6) \to SO(12)$, d.h. man kann jede solche Matrix als reelle orthogonale Matrix auffassen, die auf dem umgebenden Raum operiert.

4. Es folgt, dass alle projektiven Geraden unter der Standardeinbettung als euklidische Sphären der Dimension 2 bzw. 4 erscheinen, die gegenüber liegen (so weit wie möglich entfernt) von ihrem jeweiligen polaren Punkt.

Bei der Cayley-Ebene schließlich ist diese geometrische Polarität ebenso vorhanden, auch wenn es keine "passende" Gruppe von $(3,3)$-Matrizen über den Cayley-Zahlen gibt, die auf $\mathbb{O}^3$ durch Multiplikation operiert und die Rolle von $SO(3)$ bzw. $U(3)$ bzw. $Sp(3)$ übernimmt. Es ist dennoch so, dass sich jeder Punkt der Cayley-Ebene eineindeutig durch eine Projektion des umgebenden Raumes mit Spur 1 beschreiben lässt und dass ferner durch Diagonalisierung jeder Punkt in die Standardposition $[1,0,0]$ gebracht werden kann.

1. Wir beziehen uns auf die oben definierte Standardeinbettung $\mathbb{O}P^2 \to J \cong \mathbb{R}^{27}$, wobei wir den umgebenden Raum entweder als euklidischen Raum oder als die exzeptionelle Jordan-Algebra J auffassen können.

2. Die Polarität ist ebenfalls analog: Gegenüber von dem Punkt $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ liegt die Gerade $x = 0$, und deren Bild in J ist eine runde Sphäre der Dimension 8, beschrieben durch

$$F(0, y, z) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y\bar{y} & y\bar{z} \\ 0 & z\bar{y} & z\bar{z} \end{pmatrix}$$

gilt mit $y\bar{y} + z\bar{z} = 1$. Weil y und z zusammen stets eine assoziative Unteralgebra erzeugen, kann man in diesem speziellen Fall so rechnen wir in $\mathbb{H}P^2$, also in homogenen Koordinaten. Wir finden also eine spezielle projektive Gerade als eine runde Sphäre in der Standardeinbettung wieder.

Zusatzbeobachtung: Wenn wir E als die Matrix in J definieren, die links oben eine 1 und sonst nur Nullen hat (das entspricht gerade dem Punkt $[1, 0, 0]$ in $\mathbb{P}$), dann gilt für ein beliebiges $A = (a_{ij}) \in J$

$$A \circ E = 0 \Longleftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0,$$

d.h. die Matrizen im Bild unter F, die $A \circ E = 0$ erfüllen (also in diesem Sinne orthogonal auf E stehen), sind genau von der Form $F(0, y, z)$ oben, liegen also in der polaren Geraden mit $x = 0$.

Kurz: Polarität ist nichts anderes als Orthogonalität im Sinne des verschwindenden Jordan-Produkts.

3. Um zu zeigen, dass dies für alle anderen Punkte (und polaren projektiven Geraden) in $\mathbb{O}P^2$ auch gilt, brauchen wir eine Gruppe, die durch reell orthogonale Transformationen auf der Standardeinbettung operiert, und zwar so, dass jeder beliebige Punkt in jeden beliebigen anderen gedreht werden kann. Dann wird die gegenüberliegende projektive Gerade (als runde Sphäre S^8) mitgedreht. Insbesondere definieren wir dann die Menge aller projektiven Geraden in $\mathbb{O}P^2$ als die Menge aller Bilder der Geraden $x = 0$ unter dieser Gruppe (jeweils als Teilmenge von $\mathbb{O}P^2$ betrachtet). Wir haben dann wieder die geometrische Polarität (Punkt - Gerade) durch Minima und Maxima von Höhenfunktionen, wobei zu verschiedenen Punkten jeweils verschiedene Höhenfunktionen gehören. Jede *andere* Höhenfunktion hat dann, eingeschränkt auf eine dieser projektiven Geraden, genau ein Minimum bzw. Maximum, das dann als der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der beiden projektiven Geraden erscheint. Die dem

gegenüberliegende projektive Gerade ist die Verbindungsgerade der jeweils gegenüberliegenden Punkte. Alternativ können wir die zu einem Punkt $[x, y, z]$ polare Gerade durch die Menge aller Matrizen in $\mathbb{P}$, die auf $[x, y, z]$ orthogonal stehen im Sinne des verschwindenden Jordan-Produkts. Wenn also das Jordan-Produkt bewahrt wird, dann werden auch die Paare (Punkt - polare Gerade) bewahrt. Wir werden also auf diejenigen Transformationen geführt , die das Jordan-Proukt bewahren, also die Automorphismen von J.

4. Es fehlt "nur" noch diese Gruppe von Transformationen. Dazu betrachten wir die Gruppe G_2 aller Automorphismen der Cayley-Zahlen sowie die Gruppe F_4 aller Automorphismen der exzeptionellen Jordan-Algebra J, d.h. die Gruppe aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $A : J \to J$ mit $AX \circ AY = X \circ Y$ für alle $X, Y \in J$. Die Gruppe F_4 leistet das Gewünschte: Sie operiert auf J durch (euklidisch gesehen) orthogonale Transformationen und sie bewahrt die Standardeinbettung der Cayley-Ebene als Unterraum. Das muss natürlich noch gezeigt werden, siehe unten.

5. Es folgt wie in den Fällen von $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$ und $\mathbb{H}P^2$, dass alle projektiven Geraden von $\mathbb{O}P^2$ unter der Standardeinbettung als euklidische Sphären der Dimension 8 erscheinen, die gegenüber liegen (so weit wie möglich entfernt) von ihrem jeweiligen polaren Punkt.

Bemerkung: Als Nebenprodukt erhält man auch, dass die Cayley-Ebene sich als homogener Raum schreiben lässt, nämlich als Quotient $\mathbb{O}P^2 \cong F_4/Spin(9)$, wobei die Untergruppe $Spin(9)$ von F_4 gerade aus denjenigen Transformationen besteht, die den ausgezeichneten Punkt $[1, 0, 0]$ fix lassen und folglich auch die dazu polare Gerade in sich überführen (d.h. drehen). Weil die Gruppe $Spin(9)$ die universelle Überlagerung von $SO(9)$ ist, wird dabei jeder Punkt der polaren projektiven Geraden $x = 0$ in jeden anderen gedreht. Insbesondere wird noch klarer, warum diese projektive Gerade eine runde euklidische Sphäre ist. Für Details siehe die unten angegebene Literatur, insbesondere den sehr schönen Artikel von J.Baez. Eine "kurze" Abhandlung über diese Transformationsgruppe ist auch in dem Buch von G.Whitehead enthalten, aber es sind in jedem Fall einige Seiten, die dazu geschrieben werden müssen.

Eine Kurzform einer Beschreibung der oben genannten Gruppe von Transformationen ist auch die folgende, die zum Verständnis hilfreich sein kann.

Die Gruppe G_2: Jeder Automorphismus der Cayley-Zahlen muss die Zahl 1 fixieren, also auch den gesamten Realteil. Damit operiert er auf dem Imaginärteil. Ein beliebiges $a \in \mathbb{O}$ mit $a^2 = -1$ erzeugt eine Unteralgebra, die isomorph ist zu $\mathbb{C}$. Jeder Automorphismus überführt a in ein Element a' mit derselben Eigenschaft. Ein zweites Element $b \in \mathbb{O}$ mit $b^2 = -1$, das orthogonal auf a steht (d.h. mit $ab = -ba$), erzeugt zusammen mit a eine Unteralgebra, die isomorph ist zu $\mathbb{H}$. Auch dies muss jeder Automorphismus respektieren. Ein drittes Element $c \in \mathbb{O}$ mit $c^2 = -1$, das sich antikommutativ verhält mit a, b, ab, erzeugt zusammen mit a, b die gesamten Cayley-Zahlen, vgl. oben die Diskussion der Elemente $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_7}$. Man nennt dann (a, b, c) ein *Basistripel* der Cayley-Zahlen. Jeder Automorphismus überführt nun ein solches Basistripel in ein anderes Basistripel (a', b', c'), und umgekehrt kann man das Bild eines Basistripels willkürlich vorgeben (als Basistripel) und dies zu einem Automorphismus fortsetzen (daher der Name *Basis*). Die Dimension der so entstehenden Gruppe G_2 kann man leicht abzählen: Für das erste Element a' haben wir 6 Freiheitsgrade (nämlich die Einheits-Sphäre im Imaginärteil), für b' noch 5 und für c' noch 3, weil die von a', b' erzeugte Unteralgebra nicht in Betracht kommt. Die Dimension ist also gleich $6+5+3 = 14$. Diese Gruppe operiert durch (reell betrachtet) orthogonale Transformationen auf der Einheits-Sphäre S^6 im Imaginärteil von $\mathbb{O}$.

Die Gruppe F_4: Jeder Automorphismus einer Algebra muss das Einselement sowie das Jordan-Produkt bewahren. Außerdem muss in diesem Fall aber auch die Norm, also auch die Orthogonalität bewahrt werden. Die Norm einer Matrix in $B \in J$ ist nichts anderes als die Qudratwurzel aus der Spur von $B^2 = B \circ B$ (für $B \in \mathbb{P}$ gilt stets $Spur(B^2) = Spur B = 1$). Eine orthogonale Zerlegung einer Matrix muss also in eine ebensolche überführt werden. Man verwendet hier eine geeignete orthogonale Zerlegung von J in Unterräume, und zwar zerlegt man jede Matrix $B \in \mathbb{P}$ in eine Summe

$$B = \alpha E + \beta F + \gamma V + \delta W,$$

wobei

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x_1 \\ 0 & \bar{x_1} & \eta \end{pmatrix}$$

mit $Spur(V) = \xi + \eta = 0$ und

$$W = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x_2} \\ \bar{x_3} & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Behauptung 1: Die Automorphismengruppe F_4 lässt $\mathbb{P} \subset J$ invariant, d.h. jeder Punkt der Cayley-Ebene wird von jedem Automorphismus in F_4 in einen anderen Punkt der Cayley-Ebene abgebildet.

Dies liegt daran, dass $\mathbb{P}$ die Menge der idempotenten Matrizen mit Spur 1 ist, und sowohl die Idempotenz wie die Spur werden von jedem Automorphismus bewahrt.

Behauptung 2: Die Untergruppe $F_4^0 \subset F_4$ aller Automorphismen, die E fix lassen, kann alle Matrizen in J von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

unter Erhaltung der Spur in die Normalform einer Diagonalmatrix bringen.

Dies liegt daran, dass hier im wesentlichen nur eine Hauptachsentransformation für konjugiert symmetrische $(2,2)$-Matrizen über einer assoziativen Unteralgebra durchzuführen ist, denn alle Einträge der Matrix sind in einer solchen enthalten.

Behauptung 3: Für die Matrizen in $\mathbb{P} \subset J$ gibt es eine Hauptachsentransformation durch Automorphismen von J (also Elemente von F_4) mit dem Ergebnis, dass jede solche Matrix diagonalisiert werden kann und dann die Gestalt E annimmt. Folglich wirkt F_4 transitiv auf den Punkten und den dazu polaren projektiven Geraden der Cayley-Ebene.

Beweis: Eine gegebene Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x_2} \\ \bar{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{P} \subset J$$

kann man wie folgt orthogonal zerlegen:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x_2} \\ \bar{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\xi_2-\xi_3) & x_1 \\ 0 & \bar{x_1} & \frac{1}{2}(\xi_3-\xi_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x_2} \\ \bar{x_3} & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Quadrat der Norm des dritten Summanden ist wegen $|x_1|^2 = \xi_2\xi_3$ gleich

$$\frac{1}{4}(\xi_2-\xi_3)^2 + \frac{1}{4}(\xi_3-\xi_2)^2 + 2|x_1|^2 = \frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3)^2.$$

Also kann man nach der Behauptung 2 diesen dritten Summanden durch einen Automorphismus Φ mit $\Phi(E) = E$ (unter Erhaltung der Spur) in die diagonale Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3) \end{pmatrix}$$

bringen. Es folgt dann

$$\Phi(B) = \begin{pmatrix} \xi_1 & z & \bar{y} \\ \bar{z} & \xi_2+\xi_3 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit gewissen y, z. Es ist aber nach Behauptung 1 auch $\Phi(B) \in \mathbb{P}$, also muss wegen der algebraischen Gleichungen für $\mathbb{P}$ oben $y = 0$ gelten, also:

$$\Phi(B) = \begin{pmatrix} \xi_1 & z & 0 \\ \bar{z} & \xi_2+\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & z & 0 \\ \bar{z} & 1-\xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Norm dieser Matrix ist (nach wie vor) gleich 1, und in einem letzten Schritt (analog zu dem ersten) kann man diese Matrix durch einen Automorphismus Ψ in die Form

$$\Psi(\Phi(B)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

bringen. $\square$

Folgerung: Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen der projektiven Cayley-Ebene $\mathbb{P}$ und dem Quotienten $F_4 \big/ F_4^0$. Die Untergruppe F_4^0 tritt hier als die Standgruppe auf, die den speziellen Punkt $E \in \mathbb{P}$ fixiert.

Außerdem ist diese Untergruppe F_4^0 isomorph zur 2-fachen Überlagerung $Spin(9)$ der reellen orthogonalen Gruppe $SO(9)$. Dies ist damit allerdings nicht gezeigt. Wir verweisen dazu auf die Literatur.

Literatur:

John C. Baez, The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2002), 145–205, Corr. ibid. **42** (2005), 213, siehe auch
http://math.ucr.edu/home/baez/octonions/

Nicolaas H. Kuiper, Tight embeddings and maps. Manifolds of geometrical class three, *The Chern Symposium 1979*, pp. 97-145, Springer 1980, insbesondere die Seiten 127 ff.

Erich Ossa, *Topologie*, Vieweg 1992, insbesondere die Seiten 33 ff.

George W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer Graduate Texts in Mathematics 61, Springer 1978, insbesondere der Anhang auf den Seiten 686 ff.