Korrekturen zur 1. Auflage 2011

0. Auf S. 82 muss es in Zeile 5 heiißen $\exp X \in U(n)$ oder auch „$\exp A \in U(n)$ für jedes $A \in \mathfrak{u}(n)$“.

1. Auf S. 100 muss es in der letzten Zeile heißen $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}X^{n-1-k}\big(\mathrm{ad}X(Y)\big)X^k$.

2. Auf S. 137 oben muss es heißen *infinitesimale Isometrie*.

3. In Beispiel 14.3 (5) auf Seite 156 muss es heißen:
„erzeugt ein Ideal $\mathfrak{g}^1 = K(\mathfrak{g})$, die sogenannte Kommutatoralgebra von $\mathfrak{g}$, die auch einfach als $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ geschrieben wird, vgl. 15.9 und 17.7.“

4. Auf S. 172 in Zeile 3 muss es heißen:
„Ein fest gewählter Raum F mit $F \cong p^{-1}(x)$“

5. Auf derselben Seite in Beispiel 16.3 (1) muss es heißen:
$(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n})$

6. In Definition 17.7 auf S. 187 in der Mitte muss es heißen:
$G^{(n)} = K(G^{(n-1)})$.

7. Auf S. 214 muss es heißen: „**zu Kapitel 13**“

8. Lemma 15.11 ist so wie angegeben nicht korrekt. Es muss wie folgt heißen (und nur diese Version wird in den Kapiteln 15 und 17 benutzt):

Lemma 15.11 *Es sei G zusammenhängend. Wenn dann $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G ist, dann ist $\mathfrak{g}^1$ die Lie-Algebra von G^1 sowie allgemein $\mathfrak{g}^j$ die Lie-Algebra von G^j.*

Beweis: Für Untergruppen von $GL(n,\mathbb{C})$ haben wir in Satz 6.5 gesehen, dass $[X, Y]$ die Ableitung der Kurve

$$c(t) = \big(\exp(-\sqrt{t}X)\big)\big(\exp(-\sqrt{t}Y)\big)\big(\exp\sqrt{t}X\big)\big(\exp\sqrt{t}Y\big)$$

für $t = 0$ ist, die ja im Kommutator von G liegt. Vermöge der CBH-Formel 13.9 gilt dasselbe auch in beliebigen Lie-Gruppen, denn auch dort ist $[X, Y]$ der erste nicht-triviale Term der Taylor-Entwicklung von $\log(\exp(tX)\exp(tY))$. Weil es also für gegebene $X, Y \in \mathfrak{g}$ eine differenzierbare Kurve in G^1 gibt, deren Tangente gleich $[X, Y]$ ist, liegt auch $\exp[X, Y]$ in G^1. Also gilt $\exp(\mathfrak{g}^1) \subseteq G^1$.

Um die Umkehrung zu zeigen, müssen wir sehen, dass die Dimensionen von $\mathfrak{g}^1$ und G^1 übereinstimmen. Dafür genügt es zu zeigen, dass $\exp(\mathfrak{g}^1)$ eine offene Einsumgebung in G^1 überdeckt. Nach Voraussetzung ist G zusammenhängend, also ist nach Übungsaufgabe 11 in Kapitel 14 auch G^1 zusammenhängend. Außerdem stimmt die Dimension von G^1 mit der von $(\exp(\mathfrak{g}))^1$ überein, also der Menge der Kommutatoren von Elementen, die vom Bild von exp erreicht werden. Für jedes Element $g^{-1}h^{-1}gh \in \exp(\mathfrak{g}) \cap G^1$ in einer gewissen Einsumgebung finden wir also differenzierbare Kurven $g(t) = \exp(tX),\ h(t) = \exp(tY)$ mit $g(0) = h(0) = 1, g(1) = g, h(1) = h$. Dann besagt die CBH-Formel, dass $\log\big(g^{-1}(t)h^{-1}(t)g(t)h(t)\big)$ in der Kommutatoralgebra $\mathfrak{g}^1$ liegt. Der Grund ist, dass der

Koeffizient von t kommutativ ist in den Argumenten und daher für $g^{-1}(t)h^{-1}(t)g(t)h(t)$ verschwindet, und dass die Koeffizienten aller Terme höherer Ordnung nur aus iterierten Kommutatoren von X und Y bestehen, also jeweils in $\mathfrak{g}^1$ liegen. Also wird das Element $g^{-1}h^{-1}gh \in G^1$ von $\exp(\mathfrak{g}^1)$ erreicht.

Für die anderen Kommutatoren $\mathfrak{g}^j$ und G^j schließt man analog. $\square$