Version March 13, 2024

DIE CARDANISCHE FORMEL UND DER TASCHENRECHNER

WOLFGANG KÜHNEL

Als es noch keine Taschenrechner gab, da hatte die Cardanische Formel für die Lösungen kubischer Gleichungen noch eine gewisse Bedeutung. Sogar in der Schulmathematik tauchte sie auf, siehe [3], Seite 66. Dort findet sich mit der (hergeleiteten) Normalform

$$x^3 - 3ax + 2b = 0 \tag{1}$$

eine komplette Berechnung aller Lösungen einschließlich des sog. "casus irreducibilis". Damals hatte man an Gymnasien und Realgymnasien noch keine Angst vor komplexen Zahlen, heute beginnen sie schon aus universitären Brückenkursen für Studierende der MINT-Fächer zu verschwinden, z.B. bei dem Online-Brückenkurs VE&MINT[1].

Wenn man das auf die Fälle $x^3 + 21x - 22 = 0$ sowie $x^3 + 6x - 20 = 0$ anwendet, dann ergibt sich für die einzige reelle Lösung $x = 1$ bzw. $x = 2$, was man gewiss auch an der Faktorisierung $x^3 + 21x - 22 = (x-1)(x^2+x+22)$ im ersten und $x^3+6x-20 = (x-2)(x^2+2x+10)$ im zweiten Fall sieht. Mit der Methode des ganzzahligen Ratens wären beide somit auch im Schulunterricht behandelbar, wobei allerdings die beiden anderen Nullstellen jeweils nicht reell sind.

Das Interessante daran ist natürlich, wie sich das aus der Cardanischen Formel ergibt. Und hier führen selbst einfachste Gleichungen auf relativ komplizierte Terme.
Für die erste der beiden Gleichungen ergibt sich die Nullstelle

$$x_1 = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt{29}} + \sqrt[3]{11 - 4\sqrt{29}},$$

für die zweite

$$x_2 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}.$$

Weil man diesen Ausdrücken aber nicht so leicht ansieht, dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist, so bemühen Greefrath & Müller [1] einerseits den CAS-Rechner, andererseits dann aber eine komplizierte Rechnung mit einem Arbeitsblatt in 9 Schritten (!), um nichts anderes als die Ausgangsgleichung (die dabei nicht als bekannt vorausgesetzt wird) herzuleiten. Als "Probe" kann man das auch ganz allgemein herleiten (s. unten), in den Fällen der obigen beiden speziellen Gleichungen ergibt sich allein mit den Methoden der Schulmathematik folgendes: Bezeichnen wir die beiden dritten Wurzeln mit A und B, so erhalten wir allgemein für die Nullstelle x_0

$$x_0^3 = (A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = A^3 + B^3 + 3ABx_0,$$

was im ersten Fall

$$x_1^3 = 22 + 3\sqrt[3]{121 - 16 \cdot 29}x_1 = 22 + 3\sqrt[3]{-343} = 22 - 21x_1$$

zur Folge hat, im zweiten

$$x_2^3 = 20 + 3\sqrt[3]{100 - 36 \cdot 3}x_2 = 20 + 3\sqrt[3]{-8} = 20 - 6x_2.$$

Damit erhalten wir wieder die Ausgangspolynome. Die von Greefrath & Müller [1] vorgeschlagene, ausgesprochen umständliche 9-schrittige Rechnung für dieselbe Sache (reproduziert in [4]) kann von Schülern unmöglich gefunden werden. Und sie liefert ja auch nichts Explizites, sondern nur diejenige kubische Gleichung, der man dann mit der Methode des taschenrechnergestützten

[1] `https://www.ve-und-mint.de/kurs.php`

ganzzahligen Ratens die reelle Nullstelle entnehmen soll. Mit dem Rechner ergibt sich eine gute Näherung (mit 1000 Nachkommastellen in [1]), aber eben keine exakte Lösung. Es gibt auch Beispiele, bei denen ein normaler Taschenrechner irritiert ist und nichts Brauchbares liefert, das sind jene Fälle, bei denen jede der beiden kubischen Wurzeln betragsmäßig sehr groß ist, aber ihre Summe in der Nähe von null liegt.

Die obige Rechnung dagegen ist "straightforward" und verwendet keinerlei Rechentricks, außer dass

1. die aus Wurzelgleichungen bekannte Methode des Potenzierens zweck Beseitigung der Wurzel-Terme verwendet wird und

2. die binomische Formel dritten Grades verwendet wird, die man sich aber auch notfalls selbst aus der zweiten Grades herleiten kann.

Beides wird auch von Greefrath & Müller verwendet, aber dem Leser werden dabei unnötig große (4-stellige) Zahlen zugemutet. In früheren Jahrzehnten war der binomische Satz in der Schulmathematik noch selbstverständlich, aber neuerdings sind alle binomischen Formeln jenseits des zweiten Grades ENTRÜMPELT worden, obwohl man die Binomialverteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung für zwingend notwendig erachtet. Aus der in allen heutigen Schulbüchern für die Oberstufe anzutreffenden Bernoulli-Formel kann man die binomische Formel übrigens ohne begriffliche oder Rechen-Schwierigkeiten herleiten, siehe den Anhang.

Ganz allgemein kann man nach [3] die Ausgangsgleichung (1) mit der Substitution $x = u - \frac{a}{u}$ (die muss als Rechentrick natürlich gegeben werden; der Fall $a = 0$ ist nicht interessant) auf die Form

$$u^3 + \frac{a^3}{u^3} + 2b = 0$$

bringen, was dann eine quadratische Gleichung für $z = u^3$ wird, nämlich $z^2 + 2bz + a^3 = 0$ mit den beiden Lösungen

$$z = -b \pm \sqrt{b^2 - a^3}.$$

Im Falle einer positiven Diskriminante $b^2 - a^3$ ergibt sich vergleichsweise bequem die reelle Lösung

$$x = u + \frac{a}{u} = \sqrt[3]{z} + \frac{a}{\sqrt[3]{z}} = \sqrt[3]{-b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{-b - \sqrt{b^2 - a^3}},$$

denn das Produkt der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung für z muss gleich a^3 sein. Beide Lösungen für z führen daher auch auf dieselbe Lösung der Ausgangsgleichung.

Damit können wir dann mit $x = A + B$ die obige "Probe" durchführen:

$$\begin{aligned} x^3 = (A+B)^3 &= A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = A^3 + B^3 + 3ABx \\ &= -2b + 3\sqrt[3]{b^2 - (b^2 - a^3)}x = -2b + 3ax. \end{aligned}$$

Im Prinzip ähnliche Herleitungen finden sich in dem Aufsatz [2] von Humenberger, aber es ist doch wert anzumerken, dass die obige Herleitung einem älteren Schulbuch entstammt. Der Fall einer positiven Diskriminante sollte eigentlich selbst heute noch im schulischen Bereich behandelbar sein, denn komplexe Zahlen kommen dabei nicht vor. Es wird nur eine quadratische Gleichung gelöst. Schwieriger wird der "casus irreducibilis" mit einer negativen Diskriminante. Allerdings meint Schröder in [4] in der Einleitung: *Die elektronischen Werkzeuge haben den Kalkül trivialisiert.* Das wäre vielleicht doch noch diskussionswürdig. Auch ein CAS-System kann symbolisch nach Cardano im Allgemeinen bestenfalls die Summe zweier kubischer Wurzeln als Lösung angeben, ab da muss numerisch gerechnet werden, es sei denn, die Lösung ist rational.

Bemerkenswert ist auch, dass Humenberger seinen Aufsatz mit einer Veranschaulichung der kubischen binomischen Formel beginnt und mit komplexen Zahlen beendet. Beide sind aber aus den neuen Schulbüchern entfernt worden. Über alte und neue Schulbücher mit ihren Vor- und Nachteilen wäre sinnvollerweise an anderer Stelle zu berichten.

References

[1] G.Greefrath und J.H.Müller, Computeralgebra in der Schule – Stand der Dinge? *Computeralgebra Rundbrief* Ausgabe 50, 17–21 (2012)

[2] H.Humenberger, Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel. *ISTRON: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Band 17, 31–45 (2011)

[3] Ph.Lötzbeyer und A.Rohrberg, Arithmetik. Algebra und Analysis für die Oberstufe höherer Lehranstalten, 9.-10. Auflage. Verlag Ehlermann 1931

[4] R.Schröder, Kalkül oder Prozess – das Problem des "modernen" Mathematikunterrichts. *Mathematikinformation*, Begabtenförderung Mathematik e.V. (Hrsg.), Band 61 (2014)

ANHANG: **Der binomische Lehrsatz als Folgerung aus der Bernoulli-Formel**

Die sog. *Bernoulli-Formel* für einen n-mal wiederholten Versuch X mit zwei möglichen Ergebnissen mit komplementären Wahrscheinlichkeiten p und q, $p+q=1$, gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, genau k Treffer der einen Art zu haben:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

Sie findet sich heute in jedem Schulbuch für die Oberstufe und ist die Basis für alle Berechnungen mit der Binomialverteilung. Daraus folgt sofort durch einfache Summation der binomische Satz für $(p+q)^n$, wenn $p+q=1$ gilt:

$$(p+q)^n=1=P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

Wenn man das Summenzeichen aus didaktischen Gründen vermeiden will, kann man schreiben:

$$\begin{aligned}(p+q)^n=1=P(X\le n)&=P(X=0)\ +\ P(X=1)\ +\ \cdots\ +\ P(X=n-1)\ +\ P(X=n)\\ &=q^n\ +\ \binom{n}{1}pq^{n-1}\ +\ \binom{n}{2}p^2q^{n-2}\ +\ \cdots\ +\ \binom{n}{n-2}p^{n-2}q^2\ +\ \binom{n}{n-1}p^{n-1}q\ +\ p^n\end{aligned}$$

Dabei sollte klar sein, dass man die Rollen von p und q auch vertauschen kann, das ändert nichts.

Im letzten Schritt muss man für ein allgemeines Binom $(a+b)^n$ nur setzen $p:=a/(a+b)$ und $q:=b/(a+b)$, damit ergibt sich mit $p+q=1$ und dem obigen:

$$(a+b)^n=(a+b)^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a+b)^kp^k\cdot(a+b)^{n-k}q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}$$

q.e.d.

Mehr als das Potenzgesetz $(a+b)^n=(a+b)^k\cdot(a+b)^{n-k}$ wird dabei nicht benötigt, insbesondere braucht man keine vollständige Induktion. Man sollte annehmen, dass die obige Rechnung in der fachdidaktischen Literatur wohlbekannt ist, nur in neueren Schulbüchern nicht. Und als Gewinn sieht man z.B. auch, warum die Binomialkoeffizienten so heißen. Dieses wird in den Schulbüchern gern etwas vernebelt, aber eine Umbenennung etwa als "Bernoulli-Versuch-Koeffizienten" wurde wohl noch nicht vorgeschlagen.

Wolfgang Kühnel
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
E-mail: `kuehnel@mathematik.uni-stuttgart.de`