

D.Greulich et al. (Hrsg.) *Lambacher Schweizer, Mathematik für Gymnasien, Kursstufe Basisfach, Ausgabe für Baden-Württemberg*, Klett-Verlag 2019, ISBN 978-3-12-735340-2

Zur Schulpolitik in Baden-Württemberg Die Schulpolitik in Baden-Württemberg hat den Gymnasien folgendes beschert: Im Jahre 2002 wurden Grund- und Leistungskurse abgeschafft zugunsten von 4-stündigen Kursen für alle. Dann wurde 2004 der graphische Taschenrechner (GTR) verpflichtend eingeführt; dies erlaubte, die letzten Grenzwertbetrachtungen im Zusammenhang mit der Ableitung etwa der Exponentialfunktion dadurch zu ersetzen, dass man das Schaubild der e -Funktion in das ihrer Ableitung mit dem GTR einzeichnet und feststellt, dass beide im betrachteten Intervall gleich sind. Im weiteren Verlauf hat die Einführung von G8 dann den Beginn der Infinitesimalrechnung in die 10. Klasse verschoben und Folgen und Reihen entsorgt. Vor kurzem wurden Leistungs- und Basiskurse in Baden-Württemberg wieder eingeführt mit einem inhaltlich reduzierten 3-stündigen Basiskurs, bei dem ein Viertel des Stoffes für die bisherigen 4-stündigen Kurse gestrichen werden sollte. Dieses Hin und Her von Reformen diente jeweils der Stärkung der MINT-Fächer, so sagte das Kultusministerium.

An den Schulbüchern konnte diese Entwicklung nicht spurlos vorübergehen. Bei einem Vergleich verschiedener Jahrgänge des Lambacher Schweizer wird dies überdeutlich. Zum Beispiel hat die Abschaffung des GTR 2017 die Lehrbuchautoren dazu gezwungen, die Ableitungen der Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion anstatt mit dem GTR durch „graphisches Ableiten“ zu begründen (dadurch wird unter anderem die Rolle des Bogenmaßes beim Ableiten kaum durchschaubar). Dabei wird ein Schaubild der abzuleitenden Funktion und ihrer Ableitung gezeigt, und aus freier Hand wird mit dem Lineal die Steigung der Tangente der einen Funktion „bestimmt“ und mit dem Wert der anderen verglichen.

Die Ansprüche an Unterricht und Schulbücher Natürlich dient gerade der Grund- bzw. Basiskurs nicht der Heranbildung von mathematischen Spezialisten. Aber es gibt immer noch die theoretischen Ansprüche der KMK-Abiturstandards vom 18.10.2012: dort steht noch etwas von Wissenschaftspropädeutik und Hochschulreife *ohne* Einschränkung auf Leistungskurse. In diesem Zusammenhang werden vielfach auch die „Grunderfahrungen“ nach Heinrich Winter (1928–2017) genannt, die in [Wi] von ihm selbst ausführlich erläutert werden. Winter verlangt ausdrücklich auch Beweise und tadelt inhaltliche Reduktionen. Und er schreibt:

„Zugespitzt: Die mathematische Allgemeinbildung ist nicht durch das definiert, was ohne Formeln 'geht', sondern ist nur etwas wert, wenn sie den verständigen Gebrauch von Formeln nachdrücklich anstrebt. Eine Formel ist nicht nur ein allgemeines Rechenschema, sondern auch Ausdruck von Gesetzhaftem. Den Segen von Formeln kann man allerdings nur erfahren, wenn man kreativ mit ihnen umgehen kann.“

So wird man wohl neue Schulbücher an diesem Anspruch messen dürfen, gerade im Hinblick auf eine angestrebte *Allgemeinbildung* für eine Hochschulreife. Erinnerung sei auch an die in [MNU] geforderten drei Punkte:

- *Das Erfahren spezifischer Methoden der Mathematik.*
- *Das Erfahren des Aspektenreichtums mathematischer Inhalte.*
- *Das Erfahren der geistesgeschichtlichen Komponente der Mathematik, vor allem in deren Ringen um wachsende Klarheit bei fundamentalen Begriffen.*

Schauen wir also nach, wie diese Klarheit bei fundamentalen Begriffen realisiert ist.

Die Struktur des neuen Bandes für die Kursstufe Der alteingeführte Lambacher Schweizer liegt nun in einer abgespeckten (oder besser: abgemagerten) Version für den 3-stündigen Basiskurs in Baden-Württemberg vor. Äußerlich ist wenig verändert. Positiv ist anzumerken, dass man sich – mehr als in vorherigen Ausgaben – um Gliederung und Übersichtlichkeit bemüht hat. Es gibt zahlreiche Übungsaufgaben auf drei verschiedenen Niveaus. Beispielaufgaben für das mündliche Abitur mit Lösungen und einer herunterladbaren Folie dazu gibt es auch. Zusätzlich gibt es in dem Band hinten noch ein 17-seitiges „Grundwissen“, farbig in grün abgesetzt. Aber Vorsicht: Dieses „Grundwissen“ deckt nur das ab, was in den Kapiteln I - VIII in den dortigen Aufgaben zum Grundwissen vorkommt, und zwar sortiert nach Kapitelnummern, nicht nach Sachthemen. Zum Nachschlagen ist das nur bedingt geeignet.

Negativ ist festzustellen, dass der Inhalt bis zum Skelett abgemagert ist und auch dessen Behandlung das Ziel zu haben scheint, die *verständnisorientierte Mathematik* in eine *rezeptorientierte Mathematik* zu verwandeln, was in [He] bereits für den Stochastikteil etlicher Bücher konstatiert wurde (auch mit der Formulierung „konzeptionelle und intellektuelle Abrüstung“). Es gibt 47 Abschnitte, aufgeteilt in 8 Kapitel. Jeder Abschnitt enthält ca. 1 Seite Text zu dem, was neu eingeführt werden soll, selten mehr. Danach gibt es 2 Beispiele und dann Übungsaufgaben, Tests usw. So hat der eigentliche mathematische Text nur ca. 50 Seiten für 2 Schuljahre. Im Folgenden wird der Inhalt in der Reihenfolge der Kapitel näher betrachtet.

Der „propädeutsche Grenzwertbegriff“ und seine Folgen Wie wohl in allen Schulbüchern beginnt das Buch für die Oberstufe (Kursstufe) mit der Differential- und Integralrechnung. Da gibt es also eine Definition des Differenzenquotienten und der Ableitung (das Wort „Differentialquotient“ wird vermieden), und sofort werden Regeln dafür hingeklappert, jeweils mit einem Beispiel. Ziel ist das Anwenden von Regeln. Die Grundregeln sind aus Klasse 10 bekannt, Aber auch den jetzt ein Jahr älteren Schülern wird jede Begründung verweigert, die man als Versuch eines Beweises oder einer stichhaltigen Begründung deuten könnte (außer bei der Produktregel an einem Beispiel). Von der Kompetenz K1 oder der „*deduktiv geordneten Welt eigener Art*“ in der zweiten von Winters Grunderfahrungen ist hier nicht die Rede. Das Motto lautet stattdessen auf S. 14:

„Die Bestimmung einer Ableitungsfunktion f' mithilfe der Definition des Grenzwerts des Differenzenquotienten ist aufwendig. Einfacher geht es mit Ableitungsregeln, die man mithilfe der Definition herleiten kann.“

Aber eine Herleitung dieser Regeln findet eben nicht statt, sie werden nur aufgelistet. Grenzwerte werden als solche nicht thematisiert, geschweige denn definiert. „Grenzwert“ ist kein Stichwort im Register (auch nicht in [LS3]), aber das Symbol $\lim_{x \rightarrow a}$ wird gelegentlich verwendet. Von dem vielgerühmten „propädeutischen Grenzwertbegriff“ der KMK-Abiturstandards ist nichts

zu sehen außer „strebt für $x \rightarrow a$ gegen einen festen Wert“ (S. 10), das Symbol $x \rightarrow a$ wird nicht erklärt. Auch andere Begriffe (neben Ableitung und Riemannsumme) wie Wendepunkte werden nicht präzise erklärt, es gibt nur ein hinreichendes Kriterium auf S. 28. Die unendliche geometrische Reihe wird nur im Kleingedruckten auf S. 264 behandelt, und zwar anlässlich der geometrischen Verteilung. Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^r$ (für reelles $r \neq 0$, aber offenbar für alle reellen x) wird auf S. 14 und auch im „Rückblick“ auf S. 39 wie folgt erklärt:

Potenzregel: Für eine Funktion f mit $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gilt $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Von der notwendigen Einschränkung des Definitionsbereichs erfahren die Schüler nichts, stattdessen wird der Exponent $r = 0$ von der Regel ausgenommen (in [LS3, S. 49] gibt es gar keine Einschränkung). Das war in [LSGK, S. 161] noch anders:

Satz (Potenzregel für rationale Hochzahlen):

Für jede Funktion f mit $f(x) = x^r$ gilt $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$ ($x > 0$, $r \in \mathbb{Q}$).

Das zeigt, dass solche Inkorrektheiten in Schulbüchern nicht sein müssten, vielmehr haben sie sich – ebenso wie die faktische Abschaffung von Beweisen – unauffällig eingeschlichen und entsprechen vielleicht einem gewissen „Zeitgeist“ einer missverstandenen „didaktischen Reduktion“ (bei einer Herleitung dieser Regel hätte wohl jeder Autor gemerkt, dass x positiv sein sollte). Die Kettenregel gibt es in dem Band nur für lineare innere Funktionen (missverständlich wird das „lineare Verkettung von Funktionen“ genannt), hergeleitet wird sie dennoch nicht, die Produktregel wird nur an einem Beispiel erläutert, die Quotientenregel ist gestrichen (in [LS3, S. 31] aber noch vorhanden), die Ableitung von Umkehrfunktionen gibt es auch nicht mehr (aber für den LK noch in [LS3, S. 40]). Auf S. 24 erfahren wir:

„In der Abbildung erkennt man: Gilt an einer Stelle x , dass $f'(x) > 0$ ist, so ist f in einem Intervall um x streng monoton wachsend“,

während in [LS3, S. 48] das Gegenteil steht:

„Das Vorliegen von $f'(x_0) > 0$ an einer Stelle x_0 genügt nicht, dass f in einer Umgebung von x_0 streng monoton wächst.“

Ist die Schulmathematik widerspruchsfrei? Schön wäre es gewesen, hätten die Schüler erfahren, dass die erste Aussage etwa für Polynomfunktionen und die zweite für differenzierbare Funktionen richtig ist. Stetigkeit oder gar stetige Differenzierbarkeit als mathematischen Begriff gibt es in dem Buch nicht mehr (außer stetige Zufallsgrößen als Gegensatz zu diskreten Zufallsgrößen).

Auf einen Fehler sei, weil er abiturrelevant ist, ausdrücklich hingewiesen. Zum Trainieren der anwendungsbezogenen Aufgaben finden Schüler auf S. 30 eine Tabelle, in welcher sprachliche Ausdrücke in Eigenschaften der Bestandsfunktion f übersetzt sind; schon die erste Aussage, dass der Bestand steigt, wenn f streng monoton wachsend ist, ist in dieser Allgemeinheit falsch, wenn f eine *diskrete* Größe modelliert. Ist etwa die Gesamtzahl der Verkäufe eines Produkts zum Zeitpunkt t durch $f(t) = 1000 - 1000 e^{-0,5t}$ gegeben, dann ist f durch 1000 nach oben beschränkt, d.h. die Zahl der Verkäufe steigt irgendwann nicht mehr; andererseits ist f' überall positiv. Im Abitur 2017 in BW wurde den Schülern genau diese falsche Begründung abverlangt.

Im zweiten Kapitel geht es um Exponentialfunktionen, aber auch hier ist alles abgemagert bis zum Skelett. Hatten frühere Ausgaben (sogar noch [LS3]) den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} (a^h - 1)/h$ wenigstens kommentiert (wenngleich nicht berechnet), so fehlt dieser jetzt ganz, auch der klassische Grenzwert der stetigen Verzinsung $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ fehlt. Stattdessen heißt es auf S. 46 lapidar:

„Es lässt sich zeigen, dass es zwischen 2 und 3 eine reelle Zahl gibt, die man mit e bezeichnet, sodass für die Funktion f mit $f(x) = e^x$ die Graphen von f und ihrer Ableitungsfunktion f' zusammenfallen.“

Keine Begründung, warum die Ableitung von f mit $f(x) = a^x$ stets ein konstantes Vielfaches von f ist. Stattdessen gibt es Analysis als Spiel mit Formeln und Glaubenssätzen. Im Spezialfall $a = 2$ wird mit der Ableitung zwar auf S. 46 argumentiert, berechnet wird diese aber nur auf S. 51 in einer Übungsaufgabe. Der natürliche Logarithmus wird eingeführt, scheint aber keine Ableitung zu besitzen. Folgerichtig hat die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ auf S. 86 dann auch keine Stammfunktion, denn hierfür *„lässt sich die Potenzregel nicht anwenden. Es ergäbe sich als neue Hochzahl 0, der Kehrwert von 0 ist aber nicht definiert“*.

Integralrechnung am Minimum Und schon ist auf Seite 69 die Differentialrechnung beendet (inkl. Minima, Maxima, Wendepunkte und Anwendungen), und es beginnt die Integralrechnung. Zunächst wird das bestimmte Integral als orientierter Flächeninhalt eingeführt und als Grenzwert Riemannscher Summen (die nur nicht so heißen). Aber für kein einziges Beispiel wird dieser Grenzwert ausgerechnet. Stattdessen heißt es gönnerhaft:

„Eine solche beliebig genaue Annäherung einer Funktion f durch abschnittsweise konstante Funktionen g ist für alle in der Schule betrachteten Funktionen möglich.“

Wie war das doch: *„non vitae sed scholae discimus“* ? Aber wie das Annähern jenseits eines Bildchens mit Abzählen relativ großer Kästchen ein Ergebnis liefert, wird nicht verraten. In Beispiel 2 auf S. 79 ist das sogar falsch angegeben. Daneben gibt es Stammfunktionen und den „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ in der Form $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ mit einer sehr mageren Begründung nur durch ein Beispiel: Woher weiß man denn, dass das Integral der Geschwindigkeit bei dem Zug der zurückgelegte Weg ist, und wieso wird dieses Integral als Flächeninhalt in km gemessen? Die Integralfunktion mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ gibt es nicht als Stammfunktion (aber für den LK noch in [LS3]).

Matrizen und Vektorrechnung Im nächsten Kapitel gibt es das Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Als „Anwendung“ gelten dann zahlreiche sog. „Steckbriefaufgaben“, also das Auffinden bestimmter Funktionen durch eine gewisse Zahl von Bedingungen an die Funktion oder ihre Ableitungen.

Die Analytische Geometrie muss gemäß Lehrplan mit Geraden und Ebenen im 3-dimensionalen Raum vertreten sein. Folgerichtig werden Vektoren nur hinsichtlich ihres Nutzens eben dafür betrachtet. Dass es Rechengesetze für Vektoren gibt, die denen von Zahlbereichen ähnlich sind, wird verschwiegen. Dabei gäbe es die geschenkt, denn die Addition und die Multiplikation

mit Skalaren kommen selbstverständlich vor. Man fokussiert lieber auf die typischen Abituraufgaben zu Geraden und Ebenen. Warum das Vektorprodukt etwas mit Flächeninhalten zu tun hat, wird nur mit „man kann zeigen, dass ...“ abgetan.

Die neue Stochastik in der Schule Das Stochastik-Kapitel ist besonders knapp geraten, aber das entspricht wohl der neuen Reduktion in den Lehrplänen. Die Binomialverteilung gilt als unverzichtbar und wird auch vernünftig erklärt, die Pfadregel ist klar formuliert, und es gibt sogar eine Formel für die Binomialkoeffizienten (die in [LS3] nur noch in einer Übungsaufgabe auftaucht).

Aber dennoch ist es fast überflüssig zu erwähnen, dass die Formel $EX = np$ für den Erwartungswert der Binomialverteilung $B_{n,p}$ einfach so vom Himmel fällt und nur durch das Würfeln kurz motiviert wird, ebenso für die Varianz. Das ist sogar schon in [LS3] der Fall (obwohl diese Version auch für den LK gedacht ist), vgl. dazu auch [He]. Wie zum Hohn steht kurz danach Aufgabe 1 auf S. 252: „Berechnen (!) Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern n und p “ (und dann sind einige konkrete Zahlen genannt). Eine solche „Berechnung“ von $n \cdot p$ durch Eintippen in den Taschenrechner gilt heute schon als gymnasiale Oberstufenmathematik. In [LS1, S.286] dagegen findet sich eine Herleitung, die gar nicht schwierig ist: Nach Definition gilt $1 = (q + p)^n = \sum_k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ und $EX = \sum_k k \cdot P(X = k) = \sum_k k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Wenn man jetzt die Funktion $f(t) = (q + tp)^n$ einführt und die Ableitung von f einmal nach der Kettenregel und einmal in der Summe mit tp statt mit p berechnet, dann ergibt sich für $t = 1$ die Behauptung. Alternativ kann man sie auch aus $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ herleiten, denn der explizite Ausdruck für $\binom{n}{k}$ steht ja zur Verfügung. Man muss nur k kürzen und dann ein n herausziehen. Viel mehr als die generell heutzutage dominante Binomialverteilung gibt es nicht. Die Normalverteilung wird kurz gestreift, unterstützt durch den WTR. Anderes gibt es nur als GFS-Themen (für Präsentationen).

Nebenbei bemerkt ist die Behandlung der Stochastik in der Schule keine neue Errungenschaft. Der Stochastikteil in [LS1] ist länger und inhaltsreicher als der im vorliegenden Buch, und es finden sich dort auch schon Aufgaben, wie sie im heutigen Abitur auftauchen. Alles schon mal dagewesen, wenn auch besser, siehe die Einführung in die Stochastik [Sto] von Arthur Engel.

Fazit Eine Art Gesamturteil über diesen Band zu fällen ist schwierig. Man kann nicht sagen, er sei schlecht gemacht: Die Grafiken sind klar, und die vielen gelösten Übungsaufgaben (offenbar nur die auf dem untersten der drei Niveaus) sind gewiss nützlich. Die eingangs genannten „Tools“ zur Unterstützung der Bequemlichkeit im Abitur werden vermutlich dankend angenommen. Gewiss eignet sich das Buch zur Vorbereitung auf das mündliche Abitur. Erkauft wird diese scheinbare Übersichtlichkeit aber durch eine radikale Reduktion von Begründungen mit einem allzu häufigen „man kann zeigen, dass ...“. Ein klares mathematisches Denken mit klar herausgearbeiteten grundlegenden Begriffen im Sinne des dritten der obigen MNU-Punkte wird gar nicht mehr angestrebt. Die Stichworte der KMK-Abiturstandards werden als eine Art von Maximalprogramm interpretiert, was so gewiss nie gemeint war. Und diesen offensichtlich angestrebten bequemen und vereinfachten „Königsweg“ überzeugend darzustellen, das gelingt nur sehr bedingt. Der vorgestellte „Königsweg“ ist eben keiner: Der Leser wird im Unklaren gelassen, ob $(-\pi)^{\sqrt{2}}$ oder $(-1)^{0.5}$ sinnvolle Ausdrücke sind, denn die Funktionen f und g mit $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ und $g(x) = x^{0.5}$ sind offenbar gemäß der Potenzregel auf S. 14 hinsichtlich x uneingeschränkt

definiert und besitzen auch überall eine Ableitung. In Kapitel III über Integralrechnung gehen die Abschnitte 1 und 2 in den Abschnitt 3 zum Hauptsatz ganz wesentlich ein. Nur erfährt der Leser nicht, wie. Um die Exponentialfunktion mit Basis a ableiten zu können, muss man den natürlichen Logarithmus bereits kennen (oder den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} (a^h - 1)/h$ berechnen), der aber erst aus der e -Funktion erwächst, die ihrerseits mit der Ableitung von 2^x und 3^x begründet wird (wenngleich nur mit „man kann zeigen, dass ...“). Was Grenzwerte überhaupt sind, wird wie ein Geheimnis gehütet. Kurz: man übt sich im „Entrümpeln“ von Informationen, die vielleicht doch nicht entbehrlich sind. Auch frühere Grundkurse waren 3-stündig (vgl. [LSGK]), das allein kann es also nicht sein.

Zudem muss man konstatieren, dass auch der Basiskurs am Ende in die Allgemeine Hochschulreife mündet und jeder damit auch ein Ingenieurfach studieren kann. Schließlich benötigen 47 % aller Studierenden einen Mathematikurs im Studium, wie kürzlich von den drei Verbänden DMV, GDM und MNU in einer gemeinsamen Erklärung festgestellt wurde. Man wird kaum behaupten können, dass dieser Basiskurs eine gute Grundlage dafür liefert, und der vorliegende Band zeigt das auch. Es stellt sich die Frage, welchen Allgemeinbildungsanspruch gemäß [Wi] das G8-Gymnasium heute noch hat. Könnte ein G9-Gymnasium nicht doch mehr erreichen?

Literatur

- [LS1] Lambacher Schweizer: Analysis, Klett 1968, 3. Aufl. 1971
- [LS1a] Kurzausgabe von [LS1], Klett 1968
- [LS2] Lambacher-Schweizer: *Analysis 1 und 2* (Themenhefte Mathematik), Klett 1977/78
- [LS2a] Kurzausgabe von [LS2], Klett 1981
- [LSGK] Lambacher Schweizer: *Analysis Grundkurs*, Klett 1999
- [LS3] Lambacher Schweizer: *Mathematik für Gymnasien*, Qualifikationsphase LK/GK, Ausgabe für NRW, Klett 2014
- [LS10] Lambacher Schweizer 10, Klett 2016
- [He] N.Henze, *Verständnisorientierter gymnasialer Stochastikunterricht – quo vadis?*, Stochastik in der Schule **38** Nr. 3 (2018), 12–23
- [MNU] J.Wulfange, *Positionen der MNU zum Unterricht in Mathematik*, Mitteilungen der DMV 1995/2, 53–55
- [Sto] A.Engel, *Stochastik*, Klett Studienbücher Mathematik, Stuttgart 1987
- [Wi] H.Winter, *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*, Mitteilungen der DMV 1996/2, 35–41 sowie Mitteilungen der GDM **61** (1995), 37–46