Version 24. Mai 2021

50 Jahre mathematische Schulbücher

Wolfgang Kühnel

Vor 10 Jahren hat Richard Klouth in den Mitteilungen der DMV seine Erfahrungen aus 50 Jahren Mathematikunterricht beschrieben [K]. Seinen Bericht könnte man durch Bildungsziele, Lehrpläne und Stundentafeln der letzten 50 Jahre ergänzen bzw. überprüfen. Es ist aber schwierig, ältere Versionen dieser noch zu finden. Schulbücher dagegen sind noch zahlreich erhalten, und auch Klouth bezieht sich auf einige davon. Ich habe aus einem Nachlass diverse Versionen des alteingeführten Schulbuchs Lambacher Schweizer, und zwar aus dem Zeitraum der letzten 50 Jahre, siehe das Literaturverzeichnis. Da geht es vor allem um die Analysis in der Oberstufe. Das 90 Jahre alte Buch [LR31] werde ich gelegentlich zusätzlich zum Vergleich heranziehen. Allen genannten Büchern sind die folgenden Themen gemeinsam:

– *Differentialrechnung für elementare Funktionen nebst Rechenregeln zur Bestimmung von Ableitungen,*
– *Kriterien für Extrema, Sattelpunkte, Wendepunkte, auch mit Anwendungen,*
– *Integralrechnung einschließlich des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung,*
– *Rechenregeln zur Bestimmung von Stammfunktionen und Integralen,*
– *Bestimmung von Flächeninhalten und Volumina, auch mit Anwendungen aus der realen Welt.*

Man kann sicher mit einigem Recht sagen, dass diese Themen 100 Jahre lang den Kern der schulischen Analysis gebildet haben und weiter bilden. Auch die KMK-Abiturstandards von 2012 nennen diese Themen explizit als *inhaltsbezogene Kompetenzen*. Daher sind diese Themen auch in allen neueren Schulbüchern enthalten, allerdings – und hier ergeben sich gravierende Unterschiede – in recht unterschiedlicher Weise. In den folgenden Abschnitten soll einiges davon näher beleuchtet werden.

Es dürfte klar sein, dass zu keiner Zeit erwartet werden konnte, dass der komplette Inhalt eines solchen Schulbuchs im Unterricht behandelt wird oder gar in den Köpfen aller ankommt. Dennoch beeinflussen sich bekanntlich Schulbücher und Unterricht wechselseitig. Ein Vergleich ist also sinnvoll. Erinnert sei auch an die folgenden in [MNU] geforderten drei Punkte für den Mathematikunterricht:

– *Das Erfahren spezifischer Methoden der Mathematik.*
– *Das Erfahren des Aspektenreichtums mathematischer Inhalte.*
– *Das Erfahren der geistesgeschichtlichen Komponente der Mathematik, vor allem in deren Ringen um wachsende Klarheit bei fundamentalen Begriffen.*

Der Grenzwertbegriff Fundamental für die gesamte Analysis ist zweifellos der Grenzwertbegriff. Ohne Grenzwerte können weder Ableitungen noch Integrale erklärt oder verstanden werden. Allerdings ist auch allgemein bekannt, dass eine exakte Behandlung des Themas wie in Eingangsvorlesungen an Hochschulen (z.B. $\mathbb{R}$ *ist ein archimedisch angeordneter Körper,* $\mathbb{R}$ *ist* *vollständig*) im schulischen Bereich nicht erwartet werden kann. Man wird nolens volens Kompromisse machen, gelegentlich an die Anschauung appellieren und manche Dinge auch unbegründet lassen.

In dem 90 Jahre alten Buch [LR31] steht in § 35 die folgende Erläuterung mithilfe eines Beispiels:

> *„Durchläuft x die Werte $0,3,\ 0,33,\ 0,333,\ 0,3333,\ldots$, so kann man die Unterschiede*
>
> $$|\tfrac{1}{3} - 0,3| = \tfrac{1}{3}\cdot 0,1,\quad |\tfrac{1}{3} - 0,33| = \tfrac{1}{3}\cdot 0,01,\quad |\tfrac{1}{3} - 0,333| = \tfrac{1}{3}\cdot 0,001 \quad \textit{usw.}$$
>
> *beliebig klein machen, wenn man die Zahl der Stellen beliebig groß nimmt. Der Ausdruck $x \to a = \frac{1}{3}$ bedeutet, daß der Unterschied $|a - x|$ kleiner wird und bleibt als jede beliebige, noch so kleine Zahl ε (z.B. $0,0001$), also $|a - x| < \varepsilon$. Wenn $x \to a$ geht und x genügend nahe an a liegt, so ist x ein* Näherungswert *von a. Man schreibt $x \approx a$, z.B. $0,3333 \approx \frac{1}{3}$."*

Zuvor wird die Schreibweise erkärt: *Man schreibt $x \to a$ (gelesen "x gegen a") oder* $\lim x = a$.

Man kann gewiss das eine oder andere gegen diese Formulierung sagen, aber ich denke, das ist – im Sinne eines Kompromisses – für schulische Zwecke ausreichend. Das berüchtigte ε taucht nur ganz unauffällig auf und könnte auch weggelassen werden, wenn man die Formulierung *"jede beliebige, noch so kleine [positive] Zahl"* richtig versteht und entsprechend interpretiert. Vielmehr scheint diese Erklärung dem 80 Jahre später formulierten *propädeutischen Grenzwertbegriff* aus den KMK-Abiturstandards einen Sinn zu geben, indem daran appelliert wird, das leicht verständliche und elementare Beispiel mit $a = \frac{1}{3}$ (gleichzeitig dessen Dezimaldarstellung) ohne viel Formalismus durch Analogie auf den allgemeinen Fall zu übertragen. Ohne Kenntnis der Bruchrechnung geht es allerdings nicht. Genau solche Art von Erkärungen vermisst man allzu oft in den neuesten Schulbüchern.

Dazwischen allerdings schlug das Pendel in die andere Richtung, vielleicht für schulische Zwecke etwas zu weit: In den älteren Versionen vom Lambacher Schweizer [LS68, LS68a, LS78, LS78a] ist dieses Thema eher so behandelt, wie man es in einer Vorlesung „Analysis 1" in universitären Studiengängen erwarten würde: Erst werden geometrische Folgen und Reihen mit deren Grenzwerten betrachtet, dann reelle Zahlenfolgen mit Grenzwerten, die ganz klassisch erklärt sind:

> *„Eine Zahlenfolge heißt* konvergent *mit dem Grenzwert g, wenn es zu* jedem *$\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, so daß $|a_n - g| < \varepsilon$ ist für $n > n_0$. Folgen mit $g = 0$ heißen* Nullfolgen.*"*

Die äquivalente Version *„eine Zahlenfolge a_n ist konvergent gegen den Grenzwert g genau dann, wenn die Folge $|a_n - g|$ eine Nullfolge ist"* wird ebenfalls genannt, z.T. auch als die Definition. Noch in den offiziellen „Richtlinien und Lehrplänen für NRW" von 1999 steht für den Leistungskurs auf Seite 20:

> *„An mindestens einer Stelle sollte der Grenzwertbegriff so vertieft werden, dass die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, Grenzwerte auch im Sinne eines formalen Beweises zu untersuchen."*

Aber schon 15 Jahre später ist das aus dem „Kernlehrplan für NRW“ verschwunden. Wenn man in die allerneuesten Versionen [LS14, LS19] hineinschaut, sucht man schon das Stichwort „Grenzwert“ im Index vergeblich. Tatsächlich wird zwar von Grenzwerten gesprochen, es tauchen auch die Bezeichnungen $x \to a$ sowie $\lim_{x \to a}$ auf, aber genauer erklärt wird das nicht. Solche Erklärungen gibt es auch nicht in dem entsprechenden Band für das 10. Schuljahr am G8-Gymnasium, wenngleich dort üblicherweise schon mit der Differentialrechnung begonnen wird (aber ohne Trennung in Grund- und Leistungskurs). Strenggenommen kann man rein vom Lesen nicht verstehen, was Grenzwerte sind, wenn man es nicht vorher schon aus anderer Quelle weiß. Und das passiert bei einem grundlegenden Begriff, mit dem im weiteren Verlauf ständig hantiert werden soll!

Grenzwerte von Funktionen werden analog erklärt bzw. auch nicht erklärt. Damit ist dann der Weg frei, die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 zumindest hinzuschreiben und auch zu berechnen. In den älteren Büchern wird auch ganz selbstverständlich über Stetigkeit von Funktionen gesprochen (ohne ε und δ), und ganz schmerzlos wird in [LS68, II.17] hergeleitet, dass die Differenzierbarkeit die Stetigkeit impliziert:

> *„Nach Voraussetzung existiert* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$*. Dies bedeutet: Für* $h \neq 0$ *ist* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$ *mit* $\varepsilon(h)$ *gegen* 0 *für* h *gegen* 0*. Hieraus folgt* $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + h \cdot \varepsilon(h)$*.* h *gegen* 0 *ergibt* $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$*. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Definition der Stetigkeit.“*

Solche kleineren Beweise nehmen kaum Platz weg und sind in manchen Bänden auch in kleinerer Schrift abgedruckt, aber es ist wichtig, dass sie vorhanden sind. Eine Verpflichtung, sie durchzuarbeiten, besteht natürlich nicht. Sie aber bereits im Buch wegzulassen, bedeutet letztlich, Mathematik ohne Begründung darzubieten und ihr damit ihren eigentlichen Charakter zu rauben. Oft wird gefordert, Schüler sollten Beweise selbst entwickeln. Das würde z.B. für die Regel $(cf)' = cf'$ gelten. Allerdings müsste man dann an einer Stelle die Konstante c aus dem Limes herausziehen. Genau diese Regel ist aber im Laufe der Jahrzehnte „entrümpelt“ worden.

Die einfachste Variante der Stetigkeit ist übrigens die zu meiner Schulzeit übliche leicht zu merkende Folgenstetigkeit: *Eine Funktion* f *heißt stetig in einem Punkt* a*, wenn für jede Folge* a_n*, die gegen* a *konvergiert, die entsprechende Folge* $f(a_n)$ *gegen* $f(a)$ *konvergiert.* Damit sollte eigentlich niemand überfordert sein, der es bis in die gymnasiale Oberstufe geschafft hat. Selbst eine Erklärung der Art „kleine Änderungen von x haben kleine Änderungen von $f(x)$ zur Folge“ mit ein paar Illustrationen wäre immer noch besser, als das Thema Stetigkeit ganz wegzulassen. In [LS14] gibt es die Stetigkeit wenigstens noch für den Leistungskurs, in [LS19] dagegen fehlt das Stichwort „stetig“ im Index, und tatsächlich ist davon auch nicht die Rede. Von stetiger Differenzierbarkeit wird dann natürlich auch nicht gesprochen. Welche Eigenschaften die jeweils betrachteten Funktionen haben sollen, wird dann nicht mehr erwähnt.

Differentialrechnung und Ableitungen In einem sind sich wohl alle Schulbuchautoren einig: Der Differentialquotient wird an dem bekannten Bild der Tangente als Grenzlage der

Sekanten zumindest illustriert. Natürlich fehlt auch nie die Formel

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

In [LS68] wird schon davor 11 Seiten lang dieser neue Begriff anhand einfacher Beispiele erklärt. Lineare und reine Potenzfunktionen werden betrachtet mitsamt Tabellen der Funktionswerte und mittleren Steigungen (also denen der Sekanten) und mit zahlreichen Übungsaufgaben. Niemand wird den Vorwurf erheben können, das sei nicht hinreichend motiviert worden. Die Sekantensteigungen werden explizit hingeschrieben, und der Grenzübergang wird jeweils durchgeführt. So steht noch vor der allgemeinen Definition die Formel $(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ für natürliche Exponenten n (mit einer Begründung) zur Verfügung. Die üblichen Rechenregeln einschließlich der Quotientenregel werden nicht nur genannt, sondern durch Betrachtung der jeweiligen Differenzenquotienten und deren Grenzwerten hergeleitet bzw. bewiesen. Das ist ebenso in den anderen Bänden [LS68a, LS78, LS78a]. Auch in [LS87] wird die Potenzregel noch hergeleitet, interessanterweise mit einer Auswertung von $(x+h)^n = (x+h)(x+h)\cdots(x+h)$ in einem binären Baum in Fig. 102.1, mit dem heutzutage gern die Binomialverteilung erklärt wird.

In den neuesten Bänden [LS14, LS19] dagegen ist genau das, was die älteren Bücher detailliert erklären, enorm komprimiert. In dem jüngsten Band [LS19] steht auf S. 14:

> „*Die Bestimmung einer Ableitungsfunktion f' mithilfe der Definition des Grenzwerts des Differenzenquotienten ist aufwendig. Einfacher geht es mit Ableitungsregeln, die man mithilfe der Definition herleiten kann.*“

Aber eine Herleitung dieser Regeln findet eben nicht statt, sie werden nur aufgelistet, und nicht einmal korrekt. Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^r$ (für reelles $r \neq 0$, aber offenbar für alle reellen x) wird auf S. 14 und auch im „Rückblick“ auf S. 39 wie folgt erklärt:

> „Potenzregel: *Für eine Funktion f mit $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gilt $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.*“

Dabei wird offen gelassen, ob z.B. $(-1)^{0,5}$ oder $2^{\sqrt{2}}$ sinnvolle Ausdrücke sind. Später wird die Exponentialfunktion f mit $f(x) = 2^x$ verwendet, aber für irrationales x nie erklärt. Potenzen mit ganzen Exponenten sind aus der Mittelstufe bekannt, mit rationalen Exponenten kann man sie als Wurzeln deuten, aber irrationale Exponenten? Mir fällt nur die folgende Möglichkeit ein: Man stelle $\sqrt{2}$ als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dar (etwa als unendlichen Dezimalbruch), berechne die Folge der Potenzen mit diesen rationalen Exponenten und berufe sich dann darauf, dass deren Grenzwert mit $2^{\sqrt{2}}$ übereinstimmen sollte. Vielleicht soll der Taschenrechner diese Lücke überbrücken, der auch für 2^x stets irgendetwas ausgibt, wenn man x eingibt, aber der kennt nur endlich viele Zahlen, und alle sind rational. In [LS99] ist dieselbe Potenzregel noch korrekt wiedergegeben mit der Einschränkung $x > 0$.

Die e-Funktion Selbstverständlich geht nichts ohne die e-Funktion und andere Exponentialfunktionen, denn das ist in den KMK-Abiturstandards so vorgeschrieben. Aber auch hier dasselbe Bild: Die älteren Bücher erklären die Zahl e noch, auch wie sie zustande kommt und wie man sie definieren bzw. berechnen kann. Es gibt noch die bekannte Formel $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ der stetigen Verzinsung und in [LS68] sogar die Ungleichung $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ Noch in [LS87] wird die Folge $c_n = (1+\frac{1}{n})^n$ als monoton und beschränkt, also konvergent nachgewiesen. Im allerneuesten Band [LS19] steht dagegen lapidar (vgl. auch [LS19a]):

> *„Es lässt sich zeigen, dass es zwischen* 2 *und* 3 *eine reelle Zahl gibt, die man mit e bezeichnet, sodass für die Funktion f mit $f(x) = e^x$ die Graphen von f und ihrer Ableitungsfunktion f' zusammenfallen.“*

Zuvor werden die Exponentialfunktionen mit Basis 2 und 3 erwähnt, deren Ableitungsfunktionen (ohne Begründung) unter bzw. über der Ausgangsfunktion liegen. Dabei kommt hinzu, dass Ausdrücke wie 2^x und 3^x zwar implizit verwendet, aber für irrationales x nirgends erklärt werden. Nebenbei: Dass der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion der e-Funktion differenzierbar ist mit der Ableitungsfunktion $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, das ist für die älteren Bücher selbstverständlich, aber es ist schon in den KMK-Abiturstandards dem sogenannten erhöhten Niveau vorbehalten und kommt daher in [LS19] für das grundlegende Niveau nicht mehr vor.

Integrale, Stammfunktionen und der Hauptsatz Integrale sind eigentlich ein dankbares Thema, weil gerade Integrale etwas mit der realen Welt zu tun haben: Gesamtmasse oder Volumen eines Körpers, Flächeninhalt einer ebenen Figur, Schwerpunkte, Mittelwerte von Funktionen (etwa mittlere Temperatur, mittlere Dichte von Schadstoffen) usw. Zusammen mit der Erkenntnis des Hauptsatzes ist das eigentlich ein schlagendes Argument für die Behandlung der Analysis mit dem Ziel einer mathematische Allgemeinbildung, nicht nur für Spezialisten.

Allerdings scheint es nach den Büchern keine Einigkeit darüber zu geben, ob nun bestimmte Integrale, unbestimmte Integrale oder Integralfunktionen die wichtigsten Objekte der Betrachtung sind. Insbesondere wird der Einstieg sehr unterschiedlich gehandhabt. In [LS78, LS78a] werden erst Stammfunktionen betrachtet, dann Flächeninhalte, Integralfunktionen und der Hauptsatz. Die neuesten Bücher [LS14, LS19] beginnen mit „Rekonstruieren einer Größe“, was auch in den KMK-Standards hervorgehoben wird („Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen“, „das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand“). Danach kommen Flächeninhalte, Stammfunktionen und der Hauptsatz (in [LS19] ohne Beweis, in [LS14] mit einem Beweis, der implizit den Mittelwertsatz zu verwenden scheint, der seinerseits aber kein Thema ist. Integralfunktionen sind in [LS14] ein Thema nur für den Leistungskurs und werden in [LS19] gar nicht mehr erwähnt. Das ist eine logische Folge davon, dass man über Stetigkeit nicht mehr spricht. Denn Integralfunktionen von unstetigen Funktionen gelten nicht als Stammfunktionen, auch wenn sie existieren.

Wenn man in neueren Büchern eine verbesserte Didaktik im Sinne von verständlicheren Erklärungen erwartet, wird man auch enttäuscht. Schon in [LS78a] gibt es zum Integralbegriff sehr ausführliche Erläuterungen, alles wird mit Bildern illustriert, die Integralfunktion hat einen zentralen Platz beim Hauptsatz, während in [LS14] es auch viele Bilder gibt, die Erkärungen aber eher dünn sind: Es wird nicht mehr gezeigt, warum die Integralfunktion wirklich eine Stammfunktion ist. Man beruft sich darauf, dass die Integralfunktion dann eine Stammfunktion ist, wenn es eine (andere) Stammfunktion gibt. In der neuesten Version [LS19] wird der Hauptsatz gar nicht mehr richtig erklärt, es wird nur durch ein Beispiel mit zurückgelegtem Weg und Geschwindigkeit angedeutet, warum er überhaupt gilt. Selbst in diesem Beispiel ist das verkürzt: Man tut so, als sei es selbstverständlich, dass das Integral über die Geschwindigkeit der zurückgelegte Weg ist. Dabei ist genau das die entscheidende Aussage.

Die ungeliebten Winkelfunktionen Noch gelten sinus und cosinus als unverzichtbar auch als Funktionen mit dem Bogenmaß als Argument. Aber die Behandlung der analytischen Eigenschaften wird immer dünner. In [LR31] und sogar in [LS68] findet man noch die Standard-Potenzreihen für beide, aber es wird nicht erwähnt, dass man die gliedweise Ableitung der einen dann als die andere wiederfindet (solche Dinge könnten vielleicht auch mal ohne Beweis erwähnt werden, sie sind einfach ein interessantes Phänomen). Gleichwohl gibt es noch Herleitungen, warum der Differentialquotient von sinus genau gleich cosinus ist. Das basiert auf dem Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, den man bekanntlich auch anschaulich begründen kann mit einem Bild am Einheitkreis. Sodann braucht man ein Additionstheorem, entweder für $\sin(x + y)$ oder für $\sin x - \sin y$. Beide sind nicht schwer herzuleiten, es genügt ein Bild mit beiden Winkeln am Einheitskreis, ergänzt durch einige rechtwinklige Dreiecke. Das eine Bild findet man heute im Netz bei Mathepedia. Gleichwohl sind mit den Additionstheoremen auch diese Beweise im Laufe der Zeit aus den Büchern verschwunden. In [LS14] wird auf die Grafik des GTR Bezug genommen, ansonsten beruft man sich neuerdings auf das „grafische Ableiten“, bei dem an einigen Stellen mit einem angelegten Lineal die Steigung bestimmt und dann mit dem Wert der vermuteten Ableitungsfunktion verglichen wird. Das ist gar nicht im Sinne von Heinrich Winter [Wi]:

> *„Zugespitzt: Die mathematische Allgemeinbildung ist nicht durch das definiert, was ohne Formeln 'geht', sondern ist nur etwas wert, wenn sie den verständigen Gebrauch von Formeln nachdrücklich anstrebt. Eine Formel ist nicht nur ein allgemeines Rechenschema, sondern auch Ausdruck von Gesetzhaftem. Den Segen von Formeln kann man allerdings nur erfahren, wenn man kreativ mit ihnen umgehen kann.“*

Beim Rechnen mit formelmäßigen Ausdrücken mit sin und cos tut man sich neuerdings seltsam schwer. Selbst die Gleichung $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ kommt in neueren Büchern nicht mehr vor, und tan und cot werden in [LS14, LS19] nicht einmal mehr erwähnt. Es wird also auch verschwiegen, dass die Ableitung der Wert der Tangensfunktion für den Steigungswinkel der Tangente ist, was für [LR31, LS68, LS68a, LS78, LS78a] noch selbstverständlich ist.

Obwohl das nicht direkt zur Analysis gehört, passt dazu, dass Sinussatz und Cosinussatz gestrichen sind, in Übereinstimmung mit den KMK-Standards. Dabei ist der Sinussatz ganz einfach herzuleiten (es genügt eine Höhe im Dreieck und die Betrachtung der beiden entstehenden rechtwinkligen Dreiecke), und im Kapitel über Vektorrechnung ist es gerade in den neueren Büchern ganz normal, die Formeln $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\ a \cdot b$ sowie $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\gamma)$ mit dem eingeschlossenen Winkel γ darzubieten und sogar noch herzuleiten. Aber man kommt nicht auf die Idee, die eine in die andere einzusetzen, was sofort den Cosinussatz impliziert, wenn man

$a, b, a - b = c$ als Vektoren zu den drei Seiten eines Dreiecks interpretiert. Das Resultat ist eine inhaltliche Verarmung sowie „konzeptionelle und intellektuelle Abrüstung“ [He]. Gerade den fähigen Oberstufenschülern wird damit ein Bärendienst erwiesen, besonders im Hinblick auf ein mögliches MINT-Studium. Am Ende dieser Entwicklung könnten Bücher stehen, die nur noch die explizit in den KMK-Standards geforderten „Key Words“ abhandeln, und auch das nur in einer Weise, wie es im Abitur als Minimum gefordert wird und einem Durchschleusen möglichst vieler durchs Abitur dient. Dieses Fokussieren auf das Abitur wird in [LS19] bereits als Tugend erwähnt. Von einem „kreativen Umgang mit Formeln“ ist dann keine Rede mehr.

Was alles „entrümpelt“ wurde Hier wird nur das aufgelistet, das von [LS68] bis zu den neuesten Büchern [LS14, LS19] an Themen verschwunden ist, weil man es offenbar nicht mehr für wichtig erachtete:
Grenzwerte, Folgen, Reihen (auch geometrische Folgen und Reihen), binomischer Satz, vollständige Induktion, Stetigkeit von Funktionen, Fehlerrechnung und -fortpflanzung, Mittelwertsätze von Differential- und Integralrechnung, implizites Differenzieren, Potenzreihendarstellung wichtiger Funktionen, gebrochen rationale Funktionen, Arcusfunktionen, Hyperbelfunktionen, partielle Integration, Substitutionsregel der Integration, im Grundkurs auch: Quotientenregel, Ableitung der Logarithmusfunktion.

Das ist sicher keine vollständige Liste und betrifft auch nur die Analysis. Sinussatz, Cosinussatz, Additionstheoreme für sin und cos sind zusätzlich gestrichen. Zudem sind – wie oben ausgeführt – Beweise und Begründungen stark dezimiert worden.

Nicht alle genannten Stichworte wird man für unverzichtbar halten, aber in der Gesamtheit gibt dies doch ein erschreckendes Bild, denn wirkliches Gerümpel gibt es in der Mathematik eigentlich nicht. Man folgt nur einem vermeintlichen Zwang zur Kürzung und Vereinfachung. Beim Thema Geometrie und sogar bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das ähnlich. Lediglich die Vektorrechnung und die vektorielle analytische Geometrie sind inzwischen obligatorisch und waren es zeitweise wohl nicht. Allerdings beschränkt man sich da neuerdings auf Geraden und Ebenen im Raum sowie Übergangsmatrizen. Ein Blick in ältere Geometrie-Bände bzw. -Kapitel lehrt aber, dass auch diese Themen eher reduziert wurden. Außer Geraden und Ebenen kannten die Bücher vor 50 Jahren auch noch Kreise, Ellipsen und Hyperbeln (auch der Geometrie-Band Lambacher Schweizer von 1985). Davor kannten die Bücher sogar noch Affinitäten, Projektivitäten und Darstellende Geometrie, wie in älteren Versionen von ELEMENTE DER MATHEMATIK. Die Parabel überdauerte (eher zufällig) als Graph quadratischer Funktionen, ihre eigentlichen geometrischen Eigenschaften bleiben außen vor. Nie wird erwähnt, dass man diese vier Gebilde mit einer simplen Taschenlampe auf eine weiße Projektionsfläche zaubern kann. Das ist offenbar nicht realitätsnah genug.

Der Taschenrechner In der neueren Schulmathematik wie auch im Abitur gilt der Gebrauch des Taschenrechners als große Tugend, denn das ist als Kompetenz K5 ausdrücklich in den KMK-Bildungsstandards vorgesehen. Das wird auch an den Schulbüchern sichtbar, z.B. ist [LS14] auf den in NRW üblichen GTR ausgerichtet. Man kann damit gut die Konvergenz von Folgen und

Reihen verfolgen, man kann Wurzeln durch Näherungsverfahren berechnen und das Newton-Verfahren ausführen sowie grobe Skizzen von Funktionsgraphen ansehen.

Aber nirgends wird darauf hingewiesen, dass sich Taschenrechner gerade für die Berechnung von Differentialquotienten nur sehr bedingt eignen, weil man sehr schnell an die Grenze stößt: Betrachten wir die Quadratfunktion mit der Stelle $x_0 = 2$ und versuchen wir, die Ableitung durch Auswertung des Differenzenquotienten näherungsweise numerisch zu bestimmen. Der naive Ansatz $\frac{1}{h}((2+h)^2-4)$ mit immer kleiner werdendem $h = 10^{-k}$ führt zu den folgenden Ergebnissen, wobei $\frac{1}{h}$ bereits als 10^k eingesetzt wird:
$k = 4$ liefert die Anzeige 4.0001, $k = 5$ liefert 4.00001, $6 \leq k \leq 9$ liefert 4, $k \geq 10$ liefert 0.
Diese Ergebnisse vermitteln kein Gefühl für die Konvergenz, man ist der internen Stellenarithmetik des Rechners ausgeliefert, ohne sie beeinflussen zu können. An keiner Stelle in den Büchern habe ich einen Hinweis darauf gefunden, dass numerische Berechnungen bei sehr kleinen Nennern eben Umformungen erfordern, in diesem Fall entweder das Ausmultiplizieren des Quadrats mit dem Wegheben der beiden Terme 4 oder aber die Methode mit der Teleskopsumme, die sich allerdings nur in dem ältesten Buch [LR31] noch findet:

$$y^n - x^n = (y-x) \cdot (y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) \tag{1}$$

Diese Gleichung ist nicht schwer zu verifizieren, man kann mit ihr aber alle Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten explizit ableiten. Mit $y = x + h$ kann man die rechte Seite nach Kürzen durch h auch für größere Werte von x bzw. n bequem und numerisch stabil auswerten (ohne plötzlich den Wert 0 befürchten zu müssen), kann sich also die Konvergenzgeschwindigkeit ansehen. Gleichzeitig relativiert sich so der naive Glaube an die Allmacht der Taschenrechner. Aber diese Gleichung (1) ist im schulischen Bereich offenbar in Vergessenheit geraten, was aber kaum an der neuen Kompetenzorientierung, sondern eher an der eingeschränkten Kompetenz der Schulbuchautoren liegen dürfte. Weil auch der binomische Satz für beliebiges n nicht mehr vorkommt (paradoxerweise trotz der obligatorischen Binomialverteilung im Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung), kann man also den Differentialquotienten bei der Potenzfunktion gar nicht mehr herleiten und nimmt Zuflucht zu „man kann zeigen, dass ...“. Gerade das aber führt zu einer „rezeptorientierten“ Mathematik ohne Begründungen, obwohl man doch allenthalten die „verständnisorientierte“ Mathematik als neue didaktische Errungenschaft preist.

Damit keine Missverständnisse entstehen: Jeder wird heutzutage Verständnis haben, wenn Lehrer solche Herleitungen und Beweise im Unterricht weglassen, weil sie sie schwächeren Schülern nicht zumuten können. Aber alle Beweise schon in den Büchern zu streichen, halte ich für einen Frevel, besonders auch gegenüber den stärkeren Schülern,die vielleicht für ein MINT-Studium in Frage kommen. Zudem würde der Umfang der Bücher nicht durch die vielen Beweise anschwellen, vielmehr schwillt der Umfang durch endlose Listen von Übungsaufgaben sowie großformatige Bilder an, wobei der mathematische Gehalt dieser Bilder oft zweifelhaft ist. Bei der abgebildeten Hängebrücke vorne auf S. 13 in [LS14] wird fälschlicherweise eine Kettenlinie für die Form der (belasteten) Tragseile angegeben, es ist aber (in guter Näherung) eine Parabel.

Ein persönliches Bekenntnis Mir gefällt von allen genannten Büchern die Version [LS87] am besten, wobei mir leider der zweite Band fehlt. Das älteste Buch [LR31] bietet am meisten

Mathematik, einschließlich Potenzreihen, Taylorsche Formel, komplexe Zahlen und Funktionen, übrigens auch mit etlichen wunderbaren Abbildungen von Funktionsgraphen auf einem Millimeterraster, dürfte aber für heutige schulische Zwecke zu knapp geschrieben sein. Auch fehlt ein Schlagwortregister. Die Versionen [LS68, LS68a] enthalten auch noch sehr viel Mathematik (einschließlich Potenzreihen), leiden aber etwas unter einer gewissen Unübersichtlichkeit und wirken etwas überladen. Die ist auch dem Layout geschuldet mit viel Kleingedrucktem, wenig attraktiven Bildern und einer gewöhnungsbedürftigen Anordnung der Kapitel. Die folgenden Versionen [LS78, LS78a] sehen optisch ansprechender aus und weisen zahlreiche „Wahlthemen" aus, was auf eine Unterscheidung zwischen Grund- und Leistungskurs hinzudeuten scheint, werden an Übersichtlichkeit und grafischer Darstellung aber noch von [LS87] übertroffen. Wichtige Definitionen und Sätze sind hier eingerahmt in Kästchen, Beweise sind noch vorhanden, die zahlreichen Grafiken können es mit der heute üblichen Qualität schon aufnehmen und tragen viel zur Motivierung und Erklärung bei, das Buch ist einfach erfreulich anzuschauen und mit 190 Seiten in kleinem Format für Band 1 auch nicht zu dick. Der Inhalt ist zufriedenstellend, Grenzwerte sind ausführlich erklärt, Folgen und Reihen kommen kurz vor, Differenzierbarkeit und Stetigkeit sind erklärt, es gibt auch physikalische und wirtschaftstheoretische Anwendungen und zahlreiche Übungsaufgaben auch zu realen Sachthemen, man vermisst nichts. In einem Anhang ist sogar die vollständige Induktion erklärt. Auch der zugehörige Geometrie-Band für die Mittelstufe ist sehr schön und bietet hinten einen Beweis für das Additionstheorem zu $\sin(x+y)$, der auf dem Mittelpunktswinkel im Umkreis eines Dreiecks basiert. Den einfachsten Beweis für das Additionstheorem zu $\cos(x-y)$ mit Vektorrechnung findet sich in keinem dieser Bücher: Man zeichne $\mathbf{x} = (\cos x \sin x)$ und $\mathbf{y} = (\cos y, \sin y)$ als Vektoren im Einheitskreis, so dass $x-y$ der eingeschlossene Winkel ist. Dann ist $\cos(x-y)$ gleich dem Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ der beiden Vektoren. Das wäre in den neuesten Büchern im Kapitel zur Vektorrechnung doch zumindest eine Fußnote wert. Man will aber solche Querverbindungen offenbar nicht herstellen, trotz des überall geforderten „Vernetzens". Der Mangel hat System. Rein optisch sieht auch [LS19] gut aus, ist aber inhaltlich an einem Minimum angelangt (auch für einen Grundkurs) mit allzu häufigem „man kann zeigen, dass ..." statt einer Begründung, vgl. [LS19a].

Zusammenfassung Was soll man nun als Quintessenz daraus entnehmen, auch im Hinblick auf [K] ? Deutlich wird vor allem:

1. Die Bedeutung der Mathematik in der Schule ist in 50 Jahren generell gesunken, das wird schon an den niedrigeren Stundenzahlen deutlich, wie in [K] detailliert beschrieben. Die eine zusätzliche Stunde beim Leistungskurs der Oberstufe wurde in der Mittelstufe „wegrationalisiert". Man hat zwar das Fach als Pflichtfach beibehalten, aber in der Abiturprüfung kann man es in einigen Bundesländern abwählen, was eigentlich gegen die angestrebte Vergleichbarkeit des Abiturs ist.

2. Dass daraus auch eine gewisse Reduzierung des Schulstoffs resultieren musste, ist nur logisch, und die Schulbuchautoren konnten das nicht einfach ignorieren. Aber wenn man sich den Quotienten von „Gesamtstundenzahl früher und heute" ansieht, dann dürfte der kaum größer als 1,3 sein. Der entsprechende Quotient an mathematischem Gehalt der Schulbücher dagegen scheint – grob geschätzt – noch über 2 zu liegen. Folglich ist man beim „Entrümpeln" weit über das unvermeidliche Maß hinausgegangen.

3. Wenn man über diesen Zeitraum von 50 Jahren zu der Ansicht gelangt sein mag, gewisse Inhalte seien weniger wichtig und könnten gestrichen werden, so kann man noch irgendwie Verständnis dafür haben, denn was als „kanonischer Stoff“ zu gelten hat, darüber kann man immer streiten, und nichts ist auf ewig festgeschrieben. Aber der entscheidende Punkt ist: Daraus folgt noch lange nicht, dass sich zusätzlich die Beweise und Begründungen entwickelt haben wie die Gletscher in den Alpen: Reste sind noch vorhanden, aber der drastische Schwund ist unübersehbar. Damit hat man das „Herz der Mathematik“ angegriffen. Im Kontrast dazu sind Beweise sogar noch in den KMK-Abiturstandards im „Anforderungsbereich III“ vorgesehen.

4. Von Seiten jener „Autoritäten“, die meinen, über solche Dinge bestimmen zu sollen, wird eingewandt, dass der neue Mathematikunterricht anderes und mehr leistet, nämlich die realen Anwendungen im Blick zu haben, bei denen die Mathematik angewandt wird und Rechnungen mit dem Taschenrechner erfolgen. Analog ist an Hochschulen auch die Angewandte Mathematik (mit Computereinsatz) aufgewertet worden gegenüber der Reinen Mathematik. Man hat „mathematisch Modellieren“ zur Kompetenz K3 ernannt und damit auf eine Stufe mit „mathematisch Argumentieren“ als Kompetenz K1 gestellt. Die Kompetenzorientierung selbst allerdings scheint aus der Psychologie zu kommen (die bekannte Definition von Franz Weinert) und ist somit der mathematischen Fachwelt (auch in der Schule) von externer Seite aufgezwungen worden, ohne dass Fachmathematiker gefragt wurden. Der Nachweis des wahren Nutzens steht wohl noch aus.

5. Die Schulbücher allerdings geben diese große Verschiebung in Richtung Anwendungen gar nicht her. Denn auch in den älteren Büchern, sogar in [LR31], gibt es viele Beispiele und Übungsaufgaben zu Problemen aus der realen Welt, oft physikalischer Natur. *Anwendungen in der Physik* ist eine Standard-Überschrift gerade in älteren Büchern. Da geht es dann um die erste und die zweite Ableitung, um Integrale, gelegentlich sogar um einfache Differentialgleichungen usw. Textaufgaben zu Ableitungen und zu dem, was mal „Kurvendiskussion“ hieß, gab es in den alten Büchern und gibt es heute auch noch. Da besteht die Veränderung eher in der Länge des Textes als in dem tatsächlichen Gehalt. Diese Texte zu „entschlüsseln“, das scheint gegenüber früheren Zeiten definitiv schwieriger geworden zu sein und erfordert gelegentlich sehr gute Sprachkenntnisse (eine Seltsamkeit in der „heterogenen Migrationsgesellschaft“). Dem Wesen der Mathematik entspricht es aber kaum, wenn die sogenannten „Modellierungen“ zum Selbstzweck werden. In [KB] wird aber gerade dies als Tugend und als neue Errungenschaft hingestellt. Ob das aber wirklich zu einem besseren Verständnis der ganzen Sache beiträgt, ist wohl fraglich.

Fazit und Ausblick Das Fatale an der gegenwärtigen Situation ist, dass diese Degenerationserscheinungen auf breiter Front kein Zufall sein können, sondern nur auf Anordnung oder mit Billigung der schulischen Autoritäten (auch KMK) möglich waren mit freundlicher Unterstützung durch eine neue – von Psychometrikern dominierte – Bildungswissenschaft. Dagegen hat die eigentliche mathematische Fachwelt dem keinen Widerstand entgegensetzen wollen oder können. Es sind systematisch nicht nur bestimmte Inhalte und Regeln im Laufe der Zeit gestrichen worden, sondern es ist die mathematische Begründung und Fundierung stark ausgedünnt worden. Mit Fundierung sind hier nicht Logik und Mengenlehre gemeint, sondern es geht schlicht um die Kernfrage *„warum gilt das eigentlich?“* Insbesondere wird neuerdings der Grenzwertbegriff nicht mehr diskutiert. Immerhin geht es um die gymnasiale Oberstufe mit dem Ziel des Abiturs und der Studierfähigkeit, vgl. [CW], also geht es auch um einen gewissen inhaltlichen Anspruch und nicht nur um eine PR-wirksame Erhöhung der Abiturquote. Ein Umdenken scheint nötig zu sein.

Man sollte sich an das geflügelte Wort *„Beweise sind das Herz der Mathematik“* von Günter M. Ziegler erinnern, das im Bericht von Villani–Torossian seine Entsprechung in der Formulierung *„la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique“* findet. Das gilt nicht nur für den Nachwuchs der Mathematik-Hauptfächler, sondern für alle MINT-Fächer und auch generell als Teil der Allgemeinbildung, wie auch Heinrich Winter [Wi] ausgeführt hat.

Literatur

[LR31] Lötzbeyer–Rohrberg, *Arithmetik. Algebra und Analysis für die Oberstufe höherer Lehranstalten*, 9.-10. Auflage, Verlag Ehlermann, Dresden 1931

[LS68] Lambacher Schweizer: Analysis, Klett 1968, 3. Aufl. 1971

[LS68a] Kurzausgabe von [LS1], Klett 1968

[LS78] Lambacher-Schweizer: *Analysis* 1 *und* 2 (Themenhefte Mathematik), Klett 1977/78

[LS78a] Kurzausgabe von [LS2], Klett 1981

[LS87] Lambacher Schweizer: *Analysis Eins*, Klett 1987

[LS99] Lambacher Schweizer: *Analysis Grundkurs*, Klett 1999

[LS14] Lambacher Schweizer: *Mathematik für Gymnasien*, Qualifikationsphase LK/GK, Ausgabe für NRW, Klett 2014

[LS19] Lambacher Schweizer: *Mathematik für Gymnasien, Kursstufe Basisfach, Ausgabe für Baden-Württemberg*, Klett 2019

[LS19a] Rezension zu [LS19], `pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/igt2/Kuehnel/Lambacher.pdf` (eine Veröffentlichung wurde von den Mitteilungen der GDM abgelehnt)

[CW] E.Cramer und S.Walcher, *Schulmathematik und Studierfähigkeit*, Mitteilungen der DMV 2010/2, 110–114

[He] N.Henze, *Verständnisorientierter gymnasialer Stochastikunterricht – quo vadis?*, Stochastik in der Schule **38** Nr. 3 (2018), 12–23

[K] R.Klouth, *Rückblick auf 50 Jahre Mathematikunterricht*, Mitteilungen der DMV 2011/4, 228–233

[KB] G.Kaiser und A.Busse, *Diskussion II*, Mitteilungen der DMV 2014/2, 121–122

[MNU] J.Wulftange, *Positionen der MNU zum Unterricht in Mathematik*, Mitteilungen der DMV 1995/2, 53–55

[Wi] H.Winter, *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*, Mitteilungen der DMV 1996/2, 35–41 sowie Mitteilungen der GDM **61** (1995), 37–46

Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
70550 Stuttgart