

# Les invariants rationnels de type fini ne distinguent pas les nœuds dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Michael Eisermann

UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon, France  
Courriel: Michael Eisermann (Michael.Eisermann@umpa.ens-lyon.fr)

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Série I, 332 (2001), 51–55  
Preprint version available at <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm>

---

**Résumé.** Nous introduisons les suites géométriques de nœuds à l'aide desquelles nous établissons le critère suivant : si  $v$  est un invariant rationnel de degré  $\leq m$  dans le sens de Vassiliev, alors  $v$  est un polynôme de degré  $\leq m$  sur toute suite géométrique de nœuds. La torsion dans le groupe des tresses au-dessus de la sphère induit de la torsion au niveau des invariants de Vassiliev : nous construisons des nœuds dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  qui ne sont pas distingués par les invariants rationnels de type fini, mais qui sont distingués par les invariants de type fini à valeurs dans un groupe abélien fini.

*Rational invariants of finite type fail to distinguish knots in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$*

**Abstract.** We introduce geometric sequences of knots and establish the following criterion: if  $v$  is a rational invariant of degree  $\leq m$  in the sense of Vassiliev then  $v$  is a polynomial of degree  $\leq m$  on every geometric sequence of knots. The torsion in the braid group over the sphere induces torsion at the level of Vassiliev invariants: we construct knots in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  which cannot be distinguished by rational invariants of finite type. They can, however, be distinguished by invariants of finite type with values in a finite abelian group.

---

## Abridged English version

One of many questions in Vassiliev theory is the following: do rational Vassiliev invariants distinguish all knots? The purpose of this note is to prove that the answer is “no” for knots in the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . More precisely, we prove the following theorem:

**THEOREM 1.** – *There exist knots in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  that cannot be distinguished by rational invariants of finite type. Some of them can, however, be distinguished by invariants of finite type with values in a finite abelian group.*

As a basic tool we introduce geometric sequences of knots, generalizing twist sequences as defined by J. Dean [4] and R. Trapp [8]. A *geometric sequence of braids* is a sequence  $\tau^z$  where  $\tau$  is a pure braid and

Michael Eisermann

$z \in \mathbb{Z}$ . A *geometric sequence of knots* is a sequence  $K_z$  of knots in a 3-manifold  $M$ , which are the same except within a ball  $B \subset M$ , where they differ as a geometric sequence of braids (see fig. 1a). We prove the following criterion for Vassiliev invariants:

**THEOREM 3.** – *Let  $\mathcal{K}(M)$  be the set of isotopy classes of knots in  $M$  and let  $v : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  be an invariant of degree  $\leq m$  in the sense of Vassiliev. Then  $v$  is a polynomial of degree  $\leq m$  on every geometric sequence of knots.*

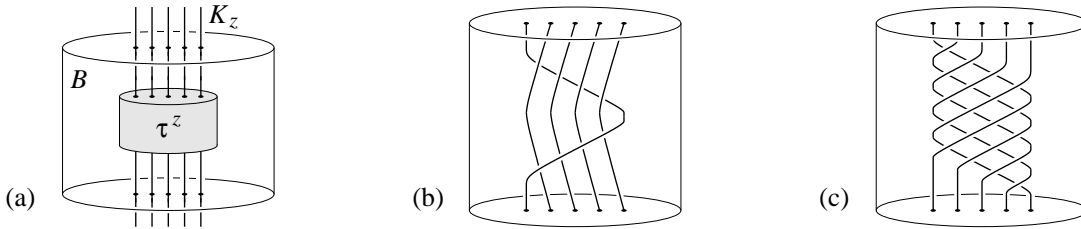


Figure 1: (a) local picture of a geometric sequence of knots; (b,c) pure braids  
 (a) *représentation locale d'une suite géométrique de nœuds*; (b,c) *tresses pures*

R.H. Fox and L.P. Neuwirth [6] defined the braid group  $B_n(S)$  over a surface  $S$ . The group  $B_n(\mathbb{D}^2)$  over the disk is Artin's braid group [1, 3, 5], which can be presented as in (1.1) below. The braid group over the sphere [3, 5] can be presented as  $B_n(\mathbb{S}^2) = B_n(\mathbb{D}^2)/\langle r_n \rangle$ , where the additional relation  $r_n$  is defined by (2.2) below and shown in fig. 1b. The group  $B_n(\mathbb{D}^2)$  is torsion-free [5, 6], whereas its quotient  $B_n(\mathbb{S}^2)$  has an element of order 2, namely the pure braid  $\tau_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$  corresponding to a full twist of  $n$  strings (see fig. 1c). The braids  $\tau_n$  and  $1_n$  cannot be distinguished by rational invariants  $B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Q}$  of finite type. They can, however, be distinguished by the abelianisation  $v_n : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z}/2n-2$ . This invariant is given by the sum of exponents, and is hence of degree 1 in the sense of Vassiliev. In order to prove Theorem 1 we extend this construction from braids to knots.

For  $t \in [0, 1]$  let  $\rho_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a rotation of  $2\pi t$  around some chosen axis. The loop  $\rho : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3)$  represents the non-trivial element in  $\pi_1 \text{SO}(3)$ . Define  $\theta : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$  by  $\theta(s, t) = (\rho_t(s), t)$ . The homeomorphism  $\theta$  fixes the boundary of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$  pointwise, and its square  $\theta^2$  is isotopic to the identity relative to the boundary. For every braid  $\sigma \in B_n(\mathbb{S}^2)$  we have  $\theta(\sigma) = \sigma \tau_n$ . In order to apply this to knots, we consider a 3-manifold  $M$  and an embedding  $S : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I} \hookrightarrow M$ , i.e. a thickened sphere in  $M$ . Define  $\theta_S : M \rightarrow M$  by  $\theta_S(x) = S\theta S^{-1}(x)$ , if  $x$  is in the image of  $S$ , and  $\theta_S(x) = x$  otherwise. Obviously  $\theta_S$  is a homeomorphism, and  $\theta_S^2$  is isotopic to the identity of  $M$ . We prove:

**LEMMA 5.** – *Rational invariants of finite type cannot distinguish a knot  $K$  from its twin  $\theta_S K$ .*

It remains to be shown that  $K$  and  $\theta_S K$  are actually distinct. This is by no means obvious: if the sphere  $S$  bounds a ball in  $M$  then  $\theta_S$  is isotopic to the identity and of course  $K = \theta_S K$ . The simplest non-trivial example is the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , for which we show:

**LEMMA 6.** – *Let  $\mathcal{K}_n$  be the set of knots in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  with homology class  $n$ . For  $n \geq 3$  there exists an invariant  $v_n : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2n-2$  of degree 1 such that  $v_n(K) - v_n(\theta_S K) \equiv n(n-1)$  for every knot  $K \in \mathcal{K}_n$ . In particular,  $K \neq \theta_S K$  whenever  $n \geq 3$  is odd.*

*Introduction* – Dans la topologie et la géométrie en dimension 3, les nœuds jouent un rôle essentiel. Parmi les concepts de leur étude, les invariants de type fini [2], aussi nommés invariants de Vassiliev, sont devenus célèbres. Une des nombreuses questions dans la théorie de Vassiliev est la suivante : les invariants rationnels de type fini distinguent-ils tous les nœuds ? Pour les nœuds dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  la réponse est « non » :

**THÉORÈME 1.** – *Dans la variété  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  il existe des nœuds qui ne sont pas distingués par les invariants rationnels de type fini, mais qui sont distingués par les invariants de type fini à valeurs dans un groupe abélien fini.*

Pour étudier les invariants de type fini nous introduisons les suites géométriques de nœuds (§1), qui généralisent les suites de nœuds twistés [4, 8]. Nous en déduisons que la torsion des tresses dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$  induit de la torsion au niveau des invariants de Vassiliev (§2). La construction peut être généralisée aux nœuds dans n'importe quelle variété réductible de dimension 3. Nous analysons  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  qui est l'exemple non-trivial le plus simple (§3).

J. Lieberum [7] a construit un isomorphisme de Kontsevich pour les entrelacs dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . À cause de l'hypothèse de caractéristique 0, l'intégrale de Kontsevich et ses généralisations ne tiennent pas compte de la torsion [2]. Dans le cas  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , la torsion contient de l'information essentielle. Dans le cas de la sphère  $\mathbb{S}^3$ , l'existence de la torsion est encore inconnue.

## 1. Suites géométriques de tresses et de nœuds

Pour un nombre  $n \geq 1$  de brins, le groupe des tresses d'Artin [1, 3, 5] est présenté par

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1.1)$$

On a un épimorphisme  $B_n \rightarrow \Sigma_n$  sur le groupe symétrique, et le noyau  $P_n$  est appelé groupe des tresses pures. On appelle *suite géométrique de tresses* une suite  $\tau^z$  où  $\tau$  est une tresse pure et  $z \in \mathbb{Z}$ .

**LEMME 2.** – *Soit  $v : B_n \rightarrow \mathbb{Q}$  un invariant de degré  $\leq m$  dans le sens de Vassiliev. Alors  $v$  est un polynôme de degré  $\leq m$  sur toute suite géométrique de tresses.*

*Démonstration.* – Soit  $I$  le noyau de l'épimorphisme  $\mathbb{Z}B_n \rightarrow \mathbb{Z}\Sigma_n$ . L'idéal  $I$  est engendré par les différences  $\sigma_i^+ - \sigma_i^-$ , alors la filtration  $I$ -adique  $\mathbb{Z}B_n \supset I \supset I^2 \supset \dots$  est la filtration de Vassiliev au niveau des tresses. L'invariant  $v : B_n \rightarrow \mathbb{Q}$  est de degré  $\leq m$  si et seulement si  $v$  est nul sur le module  $I^{m+1}$ . Soit  $\tau^z$  une suite géométrique de tresses. La suite  $v(\tau^z)$  est un polynôme de degré  $\leq m$  si et seulement si elle satisfait la condition  $\sum_{l=0}^{m+1} (-1)^l \binom{m+1}{l} v(\tau^{z+l}) = 0$  pour chaque  $z \in \mathbb{Z}$ . Celle-ci est équivalente à exiger que  $v$  soit nul sur chaque somme

$$s_z = \sum_{l=0}^{m+1} (-1)^l \binom{m+1}{l} \tau^{z+l} = \tau^z (1 - \tau)^{m+1} \quad \text{dans } \mathbb{Z}B_n.$$

Comme  $\tau$  est une tresse pure, la différence  $1 - \tau$  appartient à l'idéal  $I$ . La puissance  $(1 - \tau)^{m+1}$  appartient à  $I^{m+1}$  et donc  $v(s_z) = 0$ . Par conséquent,  $v(\tau^z)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $\leq m$ .  $\square$

Soit  $M$  une variété de dimension 3. On appelle *suite géométrique de nœuds* une suite de nœuds  $K_z$  dans  $M$  qui ne se distinguent que dans une boule  $B \subset M$ , de sorte que  $K_z \cap B$  corresponde à une suite géométrique de tresses (voir fig. 1a). Par exemple, soit  $\sigma \in B_n$  une tresse et soit  $clos(\sigma)$  le nœud dans  $\mathbb{S}^3$  qui est obtenu en fermant la tresse  $\sigma$ . Si  $\tau \in P_n$  est une tresse pure, alors les nœuds  $clos(\sigma\tau^z)$ , où  $z \in \mathbb{Z}$ , forment une suite géométrique de nœuds dans  $\mathbb{S}^3$ .

**THÉORÈME 3.** – *Soit  $\mathcal{K}(M)$  l'ensemble des nœuds dans  $M$  à isotopie près, et soit  $v : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  un invariant de degré  $\leq m$  dans le sens de Vassiliev. Alors  $v$  est un polynôme de degré  $\leq m$  sur toute suite géométrique de nœuds.*

*Démonstration.* – L'implication se déduit de la démonstration précédente.  $\square$

*Remarque.* – Les suites géométriques généralisent les suites de nœuds twistés, qui furent introduites par J. Dean [4] et R. Trapp [8]. Celles-ci sont définies en insérant les tresses  $\tau^z$ , où  $\tau = \sigma_1^2$  est une tresse à deux brins seulement. À la place des tresses, on peut aussi définir les suites géométriques d'enchevêtrements purs (« pure tangles » en anglais). Le lemme 2 et le théorème 3 se traduisent littéralement dans ce contexte.

## 2. Torsion dans les groupes des tresses

En généralisant les tresses d'Artin, R.H. Fox et L.P. Neuwirth [6] ont défini les groupes  $B_n(S)$  des tresses au dessus d'une surface  $S$ . Le groupe  $B_n(\mathbb{D}^2)$  est le groupe des tresses d'Artin présenté par (1.1). Au dessus de la sphère  $\mathbb{S}^2$  on doit ajouter une troisième relation [3, 5]

$$r_n = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \quad (2.2)$$

(voir fig. 1b) pour obtenir la présentation  $B_n(\mathbb{S}^2) \cong B_n(\mathbb{D}^2) / \langle r_n \rangle$ . Le groupe  $B_n(\mathbb{D}^2)$  est sans torsion [5, 6], mais pour  $n \geq 3$  le quotient  $B_n(\mathbb{S}^2)$  a un élément d'ordre 2 : la tresse  $\tau_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$  dans  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , qui correspond à un tour complet de tous les brins (voir fig. 1c).

LEMME 4. – *Aucun invariant*  $B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Q}$  *de type fini ne distingue les tresses*  $\tau_n$  *et*  $1_n$ .

*Démonstration.* – La tresse  $\tau_n$  est d'ordre 2, c'est-à-dire que la suite géométrique  $1_n, \tau_n, \tau_n^2, \dots$  est de période 2. Si  $v : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Q}$  est un invariant de type fini, la suite  $v(\tau_n^z)$  est un polynôme en  $z$ . La suite  $v(\tau_n^z)$  est donc constante, en particulier  $v(\tau_n) = v(1_n)$ .  $\square$

*Remarque.* – L'abélianisation  $v_n : B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z}/2n-2$  est donnée par la somme des exposants modulo  $2n-2$ . Par conséquent c'est un invariant de degré 1 dans le sens de Vassiliev qui vérifie  $v_n(\tau_n) \equiv n(n-1)$ . Si  $n$  est impair,  $n \geq 3$ , l'invariant  $v_n$  distingue les tresses  $\tau_n$  et  $1_n$ . Dans le lemme 6 on va étendre cet invariant aux nœuds dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

## 3. L'homéomorphisme de spin et les nœuds jumelés dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

L'apparition de la torsion est liée au groupe fondamental  $\pi_1 \text{SO}(3) \cong \mathbb{Z}/2$  et à l'homéomorphisme de spin d'après P.A.M. Dirac : pour le paramètre  $t \in [0, 1]$  soit  $\rho_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la rotation d'angle  $2\pi t$  autour de n'importe quel axe. Le lacet  $\rho : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3)$  représente l'élément non-trivial dans  $\pi_1 \text{SO}(3)$ . Soit  $\theta : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$  donné par  $\theta(s, t) = (\rho_t(s), t)$ . L'homéomorphisme  $\theta$  fixe le bord de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$  point par point, et  $\theta^2$  est isotope, relativement au bord, à l'identité. Comme  $\theta$  correspond à un tour complet, on a  $\theta(\sigma) = \sigma \tau_n$  pour toute tresse  $\sigma \in B_n(\mathbb{S}^2)$ .

Cette notation sert à étendre la construction des tresses aux nœuds dans une variété  $M$  de dimension 3 : soit  $S : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I} \hookrightarrow M$  un plongement, c'est-à-dire une sphère épaissie dans  $M$ . Soit  $\theta_S : M \rightarrow M$  donné par  $\theta_S(x) = S\theta S^{-1}(x)$ , si  $x$  est dans l'image de  $S$ , et  $\theta_S(x) = x$  sinon. Évidemment,  $\theta_S$  est un homéomorphisme, et  $\theta_S^2$  est isotope à l'identité de  $M$ .

LEMME 5. – *Aucun invariant*  $\mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  *de type fini ne distingue les nœuds*  $K$  *et*  $\theta_S K$ .

*Démonstration.* – La suite  $\theta_S^z K$  est de période 2 parce-que  $\theta_S^2$  est isotope à l'identité et que l'on regarde les nœuds à isotopie près. De plus, c'est une suite géométrique : après une isotopie, le nœud  $K$  coupe la sphère épaissie  $S$  en une tresse triviale à  $n$  brins. Donc l'application de  $\theta_S^z$  correspond à l'insertion de la tresse  $\tau_n^z$ . Nous avons déjà vu au lemme 4 que les invariants rationnels de type fini ne distinguent pas les nœuds d'une suite géométrique périodique.  $\square$

Il reste à montrer que les nœuds jumelés  $K$  et  $\theta_S K$  sont distincts. Si la sphère  $S$  dans  $M$  borde une boule, alors  $\theta_S$  est isotope à l'identité et donc  $K = \theta_S K$ . L'exemple non-trivial le plus simple est la variété  $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et la sphère épaissie  $S : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{I} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  définie par  $S(s, t) = (s, e^{i\pi t})$ .

LEMME 6. – *Soit*  $\mathcal{K}_n$  *l'ensemble des nœuds dans*  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  *dont la classe d'homologie est égale à*  $n$ . *Pour*  $n \geq 3$  *il existe un invariant*  $v_n : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2n-2$  *de degré 1 tel que*  $v_n(K) - v_n(\theta K) \equiv n(n-1)$  *pour tout nœud*  $K \in \mathcal{K}_n$ . *En particulier*  $K \neq \theta K$  *si*  $n$  *est impair,*  $n \geq 3$ .

Il est plausible que  $K \neq \theta K$  pour  $n$  pair,  $n \geq 4$ , et aussi pour certains nœuds ayant pour classe d'homologie l'entier  $n = 0, 1$  ou  $2$ . Pour analyser ces exemples il faudrait des invariants plus raffinés, par exemple des invariants de torsion, de degré  $\geq 2$ . Dans la présente note nous nous contentons du cas le plus simple où  $n$  est impair,  $n \geq 3$ .

*Esquisse de démonstration.* – Pour définir  $v_n$  on utilise une présentation de chirurgie : chaque nœud dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  peut être représenté par un nœud dans le tore plein  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Les nœuds dans  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  s'identifient avec les diagrammes planaires sur l'anneau  $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$  modulo des mouvements de Reidemeister. À un croisement positif (resp. négatif) on associe le poids  $+1$  (resp.  $-1$ ) si la scission produit deux courbes homologiquement non-triviales, et le poids  $0$  sinon. On définit l'invariant  $v : \mathcal{K}(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  par la somme des poids des croisements. Une analyse des mouvements de Reidemeister montre que  $v$  est bien défini. Évidemment  $v$  est de degré  $1$  dans le sens de Vassiliev.

Deux nœuds  $K$  et  $K'$  dans  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  représentent le même nœud dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  si et seulement s'ils sont reliés par le deuxième mouvement de Kirby où l'on remplace la tresse  $r_k$  à  $k$  brins de la figure 1b par la tresse triviale. Une analyse des poids des croisements montre que  $v(K) \equiv v(K') \pmod{2n-2}$ , si la classe d'homologie est égale à  $n \geq 3$ . Plus précisément, soit  $b_+$  le nombre des brins qui sont orientés positivement et soit  $b_-$  le nombre des brins qui sont orientés négativement. Selon cette notation on a  $k = b_+ + b_-$  et  $n = b_+ - b_-$ . Dans le cas  $b_- = 0$  la tresse  $r_k$  contribue à  $2n - 2$  croisements, chacun d'un poids  $+1$ . Dans le cas  $b_- \geq 1$  on obtient la même somme des poids, parce que les poids des croisements supplémentaires s'annulent. De cette façon l'invariant  $v : \mathcal{K}(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  induit l'invariant  $v_n : \mathcal{K}_n(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}/2n-2$ .

Il reste finalement à comparer les nœuds jumelés  $K$  et  $\theta K$  dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . On choisit deux représentants dans  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  qui se distinguent par une tresse  $\tau_k$  comme dans la figure 1c. De nouveau soit  $k = b_+ + b_-$  le nombre des brins et  $n = b_+ - b_-$  la classe d'homologie. Dans le cas  $b_- = 0$  la tresse  $\tau_k$  contribue à  $n(n-1)$  croisements, chacun d'un poids  $+1$ . Le cas général,  $b_- \geq 0$ , conduit à la même somme des poids. Il en résulte  $v_n(K) - v_n(\theta K) \equiv n(n-1)$ .  $\square$

*Conclusion.* – Soit  $K$  un nœud dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  ayant une classe d'homologie  $[K] = n$  telle que  $n$  soit impair,  $n \geq 3$ . Les nœuds jumelés  $K$  et  $\theta K$  sont distingués par l'invariant  $v_n : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2n-2$  (lemme 6), mais ils sont indistinguables par les invariants  $v : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathbb{Q}$  de type fini (lemme 5). Ces deux affirmations démontrent le théorème 1.

**Remerciements.** Je remercie Christine Lescop, Caroline Ausina et le rapporteur pour leurs lectures soigneuses et leurs remarques qui ont beaucoup amélioré la présentation de cette note.

### Références bibliographiques

- [1] Artin E., *Theory of braids*. Ann. of Math. **48** (1947), 101–126
- [2] Bar-Natan D., *On the Vassiliev knot invariants*. Topology **34** (1995), 423–472
- [3] Birman J.S., *Braids, links, and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies No. 82, Princeton University Press 1974
- [4] Dean J., *Many classical knot invariants are not Vassiliev invariants*. J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 7–9
- [5] Fadell E., van Buskirk J., *The braid groups of  $E^2$  and  $S^2$* . Duke Math. J. **29** (1962), 243–257
- [6] Fox R.H., Neuwirth L.P., *The braid groups*. Math. Scand. **10** (1962), 119–126
- [7] Lieberum J., *Invariants de Vassiliev pour les entrelacs dans  $S^3$  et dans les variétés de dimension trois*. Thèse, Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée No. 1998/30, Strasbourg 1998
- [8] Trapp R., *Twist sequences and Vassiliev invariants*. J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 391–405