

Übungsblatt 1: Topologisches Grundvokabular

1. HOMÖOMORPHISMEN

- 1.1. Homöomorphie $X \cong Y$ definiert eine Äquivalenzrelation zwischen topologischen Räumen. Bestimmen Sie zunächst alle zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} und anschließend ihre Äquivalenzklassen bezüglich Homöomorphie.
- 1.2. Sei X ein kompakter Raum und Y ein Hausdorff-Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ abgeschlossen, das heißt, zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ ist das Bild $f(A) \subset Y$ abgeschlossen. Insbesondere gilt dann:
 - (a) Jede injektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist eine Einbettung.
 - (b) Jede surjektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist eine Identifizierung.
 - (c) Jede bijektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus.
- 1.3. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Wir nehmen an, es gibt $a \in X$ und $\varepsilon > 0$, sodass X sternförmig ist bezüglich jedes Punktes $x \in B(a, \varepsilon)$. Man konstruiere einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$, insbesondere also $X \cong \mathbb{D}^n$.

2. TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEITEN

- 2.1. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ mittels stereographischer Projektion. (Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n ist demnach \mathbb{S}^n .)
- 2.2. Was versteht man unter Invarianz der Dimension? des Randes? des Gebietes?
- 2.3. Was versteht man unter einer (topologischen) Mannigfaltigkeit? Wie definiert man ihre Dimension? ihren Rand? (Welche Hilfsmittel brauchen Sie hier?)
- 2.4. Formulieren Sie den Klassifikationssatz für 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten. (Eine Anleitung findet man bei David Gale, *The classification of 1-Manifolds: a take-home exam*, American Mathematical Monthly 94 (1987) 170-175.)
- 2.5. Formulieren Sie den Klassifikationssatz für kompakte Flächen so explizit wie möglich, zunächst ohne dann mit Rand. (Welche Modellflächen gibt es? Wie unterscheidet man sie? Wie beweist man die Vollständigkeit dieser Liste?)

3. EINBETTUNGEN

- 3.1. Lässt sich \mathbb{S}^1 in \mathbb{R}^1 einbetten? (und allgemeiner \mathbb{S}^n in \mathbb{R}^n ?)
- 3.2. Konstruieren Sie eine Abbildung $f :]0, 1[\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ die stetig und injektiv aber keine Einbettung ist. Ist dies auch für $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ möglich? und für $]0, 1[\hookrightarrow \mathbb{R}$?
- 3.3. Nennen Sie Einbettungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ deren Komplement aus einer bzw. zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Gibt es eine Einbettung $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ deren Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{R})$ aus drei Zusammenhangskomponenten besteht?

Wir erinnern an die übliche Sprechweise: Eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ heißt *Homotopie*. Für jedes $t \in [0, 1]$ definieren wir $h_t : X \rightarrow Y$ durch $h_t(x) = h(t, x)$; diese Abbildung ist stetig. Ist jede Abbildung h_t zudem eine Einbettung bzw. ein Homöomorphismus, so nennen wir h eine *Isotopie* bzw. eine *Homöotopie*. In diesem Falle heißen die beiden Abbildungen $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ zueinander *homotop / isotop / homöotop*.

- 3.4. Diese Begriffe definieren jeweils Äquivalenzrelationen.

4. DER ALEXANDER-TRICK

Sei $p \leq q$ in \mathbb{N} und $f : \mathbb{D}^p \rightarrow \mathbb{D}^q$ stetig mit $f|_{\partial\mathbb{D}^p} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}^p}$. Dann können wir f fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ mit $\tilde{f}(x) = x$ für $|x| \geq 1$. Man zeichne Beispiele für $(p, q) = (1, 3)$. Hieraus erhalten wir eine Abbildung $\tilde{h} : [0, 1] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ vermöge

$$\tilde{h}(t, x) = \begin{cases} t\tilde{f}(x/t) & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ x & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

- 4.1.** (a) Die so konstruierte Abbildung \tilde{h} ist stetig.
Wir erhalten somit aus \tilde{f} eine Homotopie \tilde{h} von $\tilde{h}_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$ nach $\tilde{h}_1 = \tilde{f}$.
- (b) Wenn die Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar ist, dann ist auch \tilde{h} stetig differenzierbar in allen Punkten außer $(0, 0)$.
- (c) Für alle $t \in [0, 1]$ gilt $\tilde{h}_t(\mathbb{D}^p) \subset \mathbb{D}^q$ sowie $\tilde{h}_t(x) = x$ für $|x| \geq 1$. Die Einschränkung $h = \tilde{h}|_{[0, 1] \times \mathbb{D}^p}$ definiert demnach eine Homotopie $h : [0, 1] \times \mathbb{D}^p \rightarrow \mathbb{D}^q$ von $h_0 = \text{id}_{\mathbb{D}^p}$ nach $h_1 = f$ mit $h_t|_{\partial\mathbb{D}^p} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}^p}$.
- (d) Ist die gegebene Abbildung f eine Einbettung, dann ist h eine Isotopie.
- (e) Ist f ein Homöomorphismus (und somit $p = q$), dann ist h eine Homöotopie.
- 4.2.** Sei $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ein langer Knoten, also eine Einbettung mit $f(x) = x$ für $|x| \geq 1$ und $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$. Dann ist f isotop zum trivialen Knoten. (Skizze?)
Warum ist demnach Isotopie keine geeignete Äquivalenzrelation für Knoten?
- 4.3.** Sei $f : \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ ein Homöomorphismus mit $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Dann gibt es eine Homöotopie von f zur Identität $\text{id}_{\mathbb{D}^n}$ die den Rand punktweise festlässt. (Skizze?)
- 4.4.** Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, der außerhalb eines Kompaktums alle Punkte festlässt. Dann gibt es eine Homöotopie $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die außerhalb eines Kompaktums alle Punkte festlässt, mit $h_0 = \text{id}$ und $h_1 = f$.

5. KNOTEN UND SYMMETRIEN

Bitte experimentieren Sie ein wenig mit Knoten und Bewegungen, zunächst noch informell, am besten mit Schnur, Stift und Papier. Zum Beispiel:

- 5.1.** Lässt sich der Achterknoten in sein Spiegelbild überführen?

Die analoge Frage für die Kleeblattschlinge ist schwieriger (warum?) und wurde erst 1914 von Max Dehn gelöst. (M. Dehn, *Die beiden Kleeblattschlingen*, Mathematische Annalen 75 (1914) 402–413.) Wir werden darauf zurückkommen, sobald wir die geeigneten Hilfsmittel entwickelt haben. Sie können es aber natürlich jetzt schon probieren!

- 5.2.** Lässt sich die Kleeblattschlinge in ihren reversen Knoten überführen? (Dies ist derselbe Knoten in umgekehrter Durchlaufung.) Und der Achterknoten?

Sie können diese Frage auf weitere Knoten anwenden, aber ziehen Sie keine voreiligen Schlüsse. (H.F. Trotter, *Non-invertible knots exist*, Topology 2 (1963), 275–280.)

- 5.3.** Ein Zauberer hält ein unverknotetes Seil an beiden Enden zwischen seinen Händen. Er behauptet, ohne loszulassen das Seil verknoten zu können. Ist dieses Kunststück auf ehrliche Weise möglich? Können Sie Ihre Antwort beweisen?

Übungsblatt 2: Knoten und Verschlingungen

6. VERSCHLINGUNGEN

6.1. Knoten in der Ebene \mathbb{R}^2 lassen sich leicht klassifizieren. (Wie?) Versuchen Sie anschließend, für $n = 1, 2, 3, \dots$ alle n -komponentigen Verschlingungen in \mathbb{R}^2 bis auf Isotopie zu klassifizieren (mit und ohne Orientierung, mit und ohne Nummerierung). Wie viele gibt es jeweils in Abhängigkeit von n ? Was ändert sich, wenn wir statt der Ebene \mathbb{R}^2 die Sphäre \mathbb{S}^2 als umgebenden Raum betrachten?

Lösungshinweise: — Diese naheliegende Frage scheint zunächst leicht, entpuppt sich aber als knifflig. In der Übung vom 27.04.2015 wurde sie mit Begeisterung bearbeitet und auf bemerkenswerte Weisen gelöst, daher will ich hier eine kurze Zusammenfassung festhalten.

Wir nehmen die Verschlingungen als polygonal an und nutzen den Satz von Schoenflies. Obacht: Für die Verallgemeinerung von einem auf mehrere Kreise muss man den Satz genau lesen. Dies ist der topologisch interessante erste Teil, es folgt der kombinatorisch interessante zweite Teil:

Jede Einbettung von n nummerierten unorientierten Kreisen in \mathbb{R}^2 modulo Äquivalenz entspricht einem Baum mit einer Wurzel $*$ und n beschrifteten Ecken, wobei Geschwister untereinander vertauscht werden dürfen. Sei $R(n)$ die Anzahl solcher Einbettungen modulo Äquivalenz. Es gilt $R(0) = 1$, $R(1) = 1$, $R(2) = 3$ und $R(3) = 16$. Mit Ausdauer und Einfallsreichtum findet man sogar eine Rekursionsformel:

$$R(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} k R(k-1) R(n-k)$$

Zur Erklärung: Die Kreise liegen ineinander, jeder äußerste Kreis umfasst jeweils eine solche Gruppe von $k \geq 1$ Kreisen. Unter allen Gruppen wählen wir diejenige, die den Kreis mit kleinster Nummer enthält. Diese Gruppe wird umfasst von einem äußersten Kreis, darin liegen $k-1$ Kreise, außen bleiben $n-k$. Es gibt k Möglichkeiten, die kleinste Nummer zuzuordnen, und $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten, alle weiteren Nummern der Gruppe auszuwählen. Aus $R(0) = 1$ erhält man so tatsächlich $R(1) = 1$, $R(2) = 3$ und $R(3) = 16$. Die ersten Werte sind 1, 1, 3, 16, 125, 1296, 16807, 262144, 4782969, 100000000, 2357947691, \dots , siehe Online Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org/A000272. Wir bemerken am Rande eine kleine Kuriosität für Zahlenmystiker: Für 9 nummerierte Kreise in der Ebene gibt es genau 10^8 mögliche Konfigurationen,

Varianten: Wenn wir alle Kreise orientieren, so erhöht sich die Anzahl um den Faktor 2^n . Wenn wir die Nummerierung weglassen, so wird die Zählung unübersichtlicher, da manche Konfigurationen zusammenfallen. Dies scheint mir zu kompliziert. (Aber wer weiß, vielleicht fehlt noch die richtige Idee...)

Wir gehen nun von der Ebene \mathbb{R}^2 zur Sphäre \mathbb{S}^2 über. Sei $S(n)$ die Anzahl der Einbettungen von n nummerierten orientierten Kreise in \mathbb{S}^2 . Wir betrachten den Kreis C mit der kleinsten Nummer: Er zerlegt die Sphäre in zwei offene Kreisscheiben, $\mathbb{S}^2 \setminus C = A \sqcup B$, die wir dank der Orientierung von C und \mathbb{S}^2 auseinanderhalten können. In A liegen $k-1$ Kreise und in B bleiben $n-k$. Wir erhalten ähnlich wie zuvor:

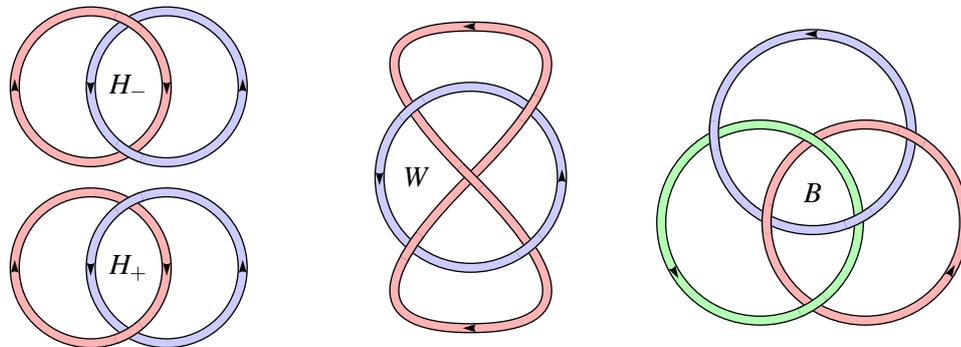
$$S(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 2^{n-1} R(k-1) R(n-k)$$

Die ersten Werte sind 1, 1, 4, 32, 400, 6912, 153664, 4194304, 136048896, 825032704, 136048896, \dots , siehe Online Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org/A127670 (eine neue Folge seit 2007).

Varianten: Die Diskussion von Varianten, etwa unnummerierte Kreise oder unorientierte Kreise oder beides, scheint mir zu kompliziert, um mit gleicher Freude weiter verfolgt zu werden. (Aber wer weiß...)

Die von Ihnen gelöste rekursive Abzählung für nummerierte Kreise ist vermutlich bereits bekannt, allerdings konnte ich hierzu keine Quelle finden. (Ich habe auch nicht lange gesucht.) Die sehr umfangreiche OEIS erwähnt zwar viele Quellen und Querverweise, aber nichts zu Kreisen in der Ebene. —

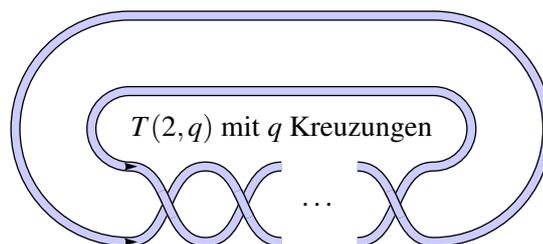
- 6.2. Zeigen Sie, dass sich die Hopf-Verschlingung H_{\pm} nicht trennen lässt. Gelingt der Beweis mit der Verschlingungszahl? alternativ auch mit der p -Färbungszahl? Lässt sich die Whitehead-Verschlingung trennen? Wie lässt sich das beweisen? Lassen sich die Borromäischen Ringe trennen? Wie lässt sich das beweisen?



- 6.3. Seien $p \geq 3$ prim und q ungerade. Bestimmen Sie alle p -Färbungen des Torusknotens $T(2, q)$. Berechnen Sie so insbesondere $n = \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Col}_p(T(2, q))$.

Lösungshinweise: — Offensichtlich gilt $n \in \{1, 2\}$. Ausrechnen ergibt $n = 2$ genau dann, wenn $p \mid q$.
 Zunächst die gebildete Lösung der linearen Algebra: Wir färben mit Elementen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^2$. Jede Kreuzung $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 2b-a \end{pmatrix}$ entspricht der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir suchen also die Fixpunkte der Abbildung A^q . Hierzu bietet sich die Jordan-Form an: Den Eigenvektor $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 kennen wir schon. Der zweite Eigenwert ist ebenfalls 1 und führt zum Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bezüglich der Basis $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ hat A demnach die Form $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und A^q entspricht $J^q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fixpunktmenge ist der Kern von $J^q - E = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dieser hat Dimension 2 genau wenn $p \mid q$, andernfalls nur Dimension 1.

Es gibt auch eine ungebildete aber kürzere Lösung: Wir färben mit Elementen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^2$. Wir suchen nicht-triviale Färbungen, also $a \neq b$. Wir können zu $a = 0$ verschieben und auf $b = 1$ skalieren. Wir erhalten dann $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} q \\ q+1 \end{pmatrix}$. Dies schließt sich genau dann, wenn $p \mid q$ gilt. —



- 6.4. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele wilde Knotentypen gibt. Anleitung: Wir nennen einen Knoten σ -zahn, wenn er sich aus abzählbar vielen Geradenstücken zusammensetzt. Lässt er sich dann als ebenes Diagramm darstellen? Wir betrachten p -Färbungen und nutzen ihre Invarianz (die in dieser Verallgemeinerung noch unbewiesen ist). Konstruieren Sie eine Surjektion von σ -zahnigen Knotentypen auf $2^{\mathbb{P}}$, wobei $\mathbb{P} = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ die Menge der ungeraden Primzahlen ist.

7. KNOTENDIAGRAMME MIT BIS ZU VIER KREUZUNGEN

- 7.1.** Es gibt keine Knotentypen mit minimaler Kreuzungszahl 1 oder 2. Nebenprodukt der erschöpfenden Suche: Es gibt bis auf Spiegelung genau eine nicht-triviale Verschlingung mit Kreuzungszahl 2, nämlich die Hopf–Verschlingung.
- 7.2.** Es gibt bis auf Spiegelung nur einen Knotentyp mit minimaler Kreuzungszahl 3, nämlich die Kleeblattschlinge.
- 7.3.** Es gibt nur einen Knotentyp mit minimaler Kreuzungszahl 4, nämlich den Achterknoten. Hier sind beide Spiegelbilder äquivalent.

Um sicherzustellen, dass unsere Liste redundanzfrei ist und die angegebenen Kreuzungszahlen wirklich minimal sind, müssen wir diese drei Knotentypen unterscheiden:

- 7.4.** Zur Unterscheidung bestimme man die Anzahl der 3- und 5-Färbungen der Kleeblattschlinge und des Achterknotens.

8. GLATTE KNOTEN

Wir betrachten lange Knoten, also glatte Einbettungen $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = (x, 0, 0)$ für $|x| \geq 1$ und $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$. (Zeichnen Sie zunächst einfache Beispiele.)

- 8.1.** Seien $f_0, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei lange Knoten mit gleichem Bild $f_0(\mathbb{R}) = f_1(\mathbb{R})$.

Gibt es eine Diffeotopie $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, wie immer mit den Randbedingungen $g_0 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ und $g_t(x) = x$ für $|x| \geq 1$, sodass $f_1 = f_0 \circ g_1$ gilt?

Gibt es eine Diffeotopie $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wie immer mit $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $h_t(x) = x$ für $|x| \geq 1$, sodass $f_1 = h_1 \circ f_0$? Was bedeutet das anschaulich?

- 8.2.** Seien $f_0, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei glatte Knoten. Angenommen, es gibt einen Diffeomorphismus $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $g(x) = x$ für alle $|x| \geq 1$, sodass $f_1 = g \circ f_0$ gilt. Dann existiert auch eine Diffeotopie $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $h_t(x) = x$ für $|x| \geq 1$, sodass $f_1 = h_1 \circ f_0$ gilt.

(Hinweis: Der Alexander-Trick mit Zentrum außerhalb des Knotens liefert eine glatte Isotopie des Knotens; diese kann man zu einer Diffeotopie fortsetzen.)

Übungsblatt 3: Schlingel und Zöpfe

9. VON REIDEMEISTER ZU ARTIN UND DIRAC

- 9.1.** Formulieren Sie den Satz von Reidemeister für Schlingel. Erklären Sie zunächst die nötigen Präzisierungen: welche Schlingel? unter welchen Bewegungen? welche Diagramme? unter welchen Zügen? Schließlich: Wie verläuft der Beweis?
- 9.2.** Folgern Sie hieraus, dass die Schlingelkategorie von vier elementaren Schlingeltypen erzeugt wird: neben der Identität genügen positive und negative Kreuzungen zwischen zwei benachbarten Strängen sowie Maximum und Minimum.

Hinweis: Man kann für Schlingeldiagramme erreichen, dass Kreuzungen auf verschiedenen Höhen liegen und keine Kante auf konstanter Höhe verläuft.

Zusatz: Wenn Sie die Mühe nicht scheuen, können Sie die Reidemeisterzüge übersetzen in Relationen zwischen diesen Erzeugern. Es sind leider recht viele Einzelfälle. Für die nachfolgend diskutierte Zopfgruppe ist alles leichter!

- 9.3.** Formulieren Sie den Satz von Reidemeister für Zöpfe. Wie oben: welche Zöpfe? unter welchen Bewegungen? welche Diagramme? unter welchen Zügen? Folgern Sie Artins Präsentation der Zopfgruppe B_n durch Erzeuger und Relationen:

$$B_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad \text{für } |i-j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i \quad \text{für } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

- 9.4.** Konstruieren und beweisen Sie die kurze exakte Sequenz $1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$ zwischen symmetrischer Gruppe S_n , Zopfgruppe B_n und reiner Zopfgruppe P_n . Zeigen Sie, dass P_n in B_n normal erzeugt wird vom Element s_1^2 , und folgern Sie:

$$S_n = \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \mid \begin{array}{l} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j \quad \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i \quad \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i^2 = 1 \quad \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

Hinweis: Kreuzungswechsel trivialisieren jeden reinen Zopf.

Bemerkung: Vielleicht kennen Sie einen direkten, algebraischen Beweis dieser Präsentation, der ohne die Kenntnis der Zopfgruppe auskommt; in diesem Falle wiederholen Sie diesen als Übung. Ist der topologische Beweis kürzer? Warum?

- 9.5.** Folgern Sie die Abelschmachungen von B_n und von S_n . Noch interessanter ist P_n .
- 9.6.** Formulieren Sie p -Färbungen von Zöpfen als Darstellung der Zopfgruppe B_n auf dem \mathbb{F}_p -Vektorraum \mathbb{F}_p^n , also als Gruppenhomomorphismus $B_n \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{F}_p$. Wie operieren die elementaren Zöpfe? Sind die elementaren Relationen erfüllt? Wie erhalten wir zum Zopf $z \in B_n$ den Färbungsraum $\text{Col}_p(\text{cl}(z))$ des Abschlusses?
Bemerkung: Dies ist nur ein Miniaturbeispiel. Darstellungen von Zopfgruppen und Verschlingungsinvarianten sind seit den 1980er Jahren ein aktives Gebiet.
- 9.7.** Aus Artins Zopfgruppe $B_n(\mathbb{R}^2)$ entsteht Diracs Zopfgruppe $B_n(\mathbb{S}^n)$ durch die zusätzliche Relation $s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_2 s_1 = 1$. *Hinweis:* Neben Δ -Zügen in $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ gibt es nur einen neuen Typ Δ -Zug über die Achse $\{\infty\} \times [0, 1]$.
- 9.8.** Anders als Artins Zopfgruppe $B_n(\mathbb{R}^n)$ enthält Diracs $B_n(\mathbb{S}^n)$ Torsionselemente: Der Zopf $z = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ ist zentral in $B_n(\mathbb{R}^n)$. In $B_n(\mathbb{S}^2)$ gilt $z \neq 1$ aber $z^2 = 1$.
- 9.9.** Die Gruppen $B_2(\mathbb{S}^2)$ und $B_3(\mathbb{S}^2)$ sind endlich. Welche Gruppen sind dies?

10. VERBUNDENE SUMME

- 10.1.** In der Vorlesung haben wir die Bijektion $cl : \mathcal{T}_{\text{rein}}(1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}$ diskutiert. Wozu benötigen wir hierbei die Orientierung? Gilt die Bijektion auch für $n \geq 2$ Komponenten, das heißt: Ist auch der Abschluss $cl : \mathcal{T}_{\text{rein}}(n, n) \rightarrow \mathcal{L}_n$ eine Bijektion?
- 10.2.** Zeigen Sie allgemeiner, dass der Abschluss $cl : \mathcal{T}(1, 1) \rightarrow \mathcal{L}^*$ eine Bijektion ist zwischen orientierten $(1, 1)$ -Schlingeln, eventuell mit geschlossenen Komponenten, und orientierten Verschlingungen mit einer markierten Komponente. Wie lässt sich demnach eine verbundene Summe $\sharp : \mathcal{L}^* \times \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{L}^*$ erklären?
- 10.3.** Zeigen Sie, dass die verbundene Summe von $(1, 1)$ -Schlingeln kommutativ ist. Zeigen Sie an Beispielen, dass dies für $(2, 2)$ -Schlingel nicht mehr gilt. Sie gilt selbst für reine $(2, 2)$ -Schlingel nicht, aber das scheint schwieriger. Leichtere Analogie: Für 2-Zöpfe gilt Kommutativität, aber für 3-Zöpfe nicht mehr.

Hinweis: Man kann die Kommutativität an einem Beispiel durch einen „Film“ illustrieren, das ist recht überzeugend. Alternativ können Sie dies in expliziten Formeln ausdrücken: Wir parametrisieren $(1, 1)$ -Schlingel durch (glatte) Schlauchumgebungen $f : \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ mit der Randbedingung $f(x, t) = (x, t)$ für $t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$. Formulieren Sie die Verknüpfung \sharp und die (glatte) Isotopien $f \sharp id \sim f \sim id \sharp f$ sowie $f \sharp g = (f \sharp id) \circ (id \sharp g) \sim (id \sharp f) \circ (g \sharp id) = g \sharp f$.

Übungsblatt 4: Präsentationen von Gruppen

11. ZENTRUM, ABELSCHMACHUNG, TORSION

- 11.1.** (a) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(S_n)$ der symmetrischen Gruppe S_n .
 (b) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(F_n)$ der freien Gruppe F_n .
 (c) Wiederholen Sie, wie man hiermit das Zentrum $Z(P_n)$ und $Z(B_n)$ bestimmt.
- 11.2.** (a) Wiederholen Sie die Abelschmachtung $B_n \rightarrow (B_n)_{\text{ab}}$ der Zopfgruppe B_n , sowie die Abelschmachtung $S_n \rightarrow (S_n)_{\text{ab}}$ der symmetrischen Gruppe S_n .
 (b) Bestimmen Sie die Abelschmachtung $P_n \rightarrow (P_n)_{\text{ab}}$ der reinen Zopfgruppe P_n .
Hinweis: In diesem glücklichen Falle genügen geeignete Erzeuger a_{ij} auch ohne die Kenntnis aller Relationen. Man nutze die Verschlingungszahlen.
- 11.3.** (a) Bestimmen Sie in der freien Gruppe F_n alle Elemente endlicher Ordnung.
 (b) Folgern Sie in der reinen Zopfgruppe P_n alle Elemente endlicher Ordnung.
Bemerkung: Für die Zopfgruppe B_n gilt dasselbe, ist aber schwieriger.

12. TIETZE–TRANSFORMATIONEN

- 12.1.** Wiederholen Sie die Wirtinger–Präsentation $\pi_D = \langle B_D \mid C_D \rangle$ eines Knotendiagramms D (oder Schlingels), kurz „Bögen modulo Kreuzungen“. Übersetzen Sie Reidemeister–Züge in zugehörige Isomorphismen bzw. Tietze–Transformationen. Wie verhalten sich hierbei Meridian m_D und Longitude ℓ_D ? Inwiefern ist damit die so präsentierte Gruppe (π_D, m_D, ℓ_D) eine Invariante des Knotentyps? Gilt dies selbst dann noch, wenn wir nichts von der Fundamentalgruppe wüssten?
- 12.2.** Sind die Gruppen $\langle s \mid s^6 \rangle$ und $\langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1, ab = ba \rangle$ isomorph?
 Allgemeiner sei $n = pq$ mit teilerfremden Faktoren $p, q \in \mathbb{N}$, also $\text{ggT}(p, q) = 1$. Sind die beiden Gruppen $\langle s \mid s^n \rangle$ und $\langle a, b \mid a^p = b^q = 1, ab = ba \rangle$ isomorph? Geben Sie zueinander inverse Isomorphismen an sowie Tietze–Transformationen.
- 12.3.** Die Gruppen $G = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ und $H = \langle s, t \mid s^3 = t^2 \rangle$ sind isomorph:
 (a) Geben Sie zueinander inverse Isomorphismen $h : G \xrightarrow{\sim} H$ und $k : H \xrightarrow{\sim} G$ an.
 (b) Geben Sie Tietze–Transformationen zwischen den beiden Präsentationen an.
Hinweis: In der Gruppe G gilt $(xyx)(xyx) = (xy)(xy)(xy)$.
 Den allgemeinen Fall des Satzes von Tietze beweist man genauso. Sehen Sie wie?
- 12.4.** Zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sei $P_n = [v_1, v_2, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^2$ das regelmäßige n -Eck mit den Eckpunkten $v_k = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \in \mathbb{R}^2$ für $k = 1, 2, \dots, n$.
 (a) Die *Diedergruppe* $D_n = \text{Isom}(P_n)$ besteht aus n Drehungen und n Spiegelungen. Geben Sie diese explizit als Matrizen in $O_2 \mathbb{R} \subset GL_2 \mathbb{R}$ an sowie in der symmetrischen Gruppe S_n als Permutationen der Eckpunktmenge $\{1, \dots, n\}$.
 (b) Zeigen Sie, dass D_n von zwei geeigneten Spiegelungen erzeugt wird und entwickeln Sie hieraus eine Präsentation durch zwei Erzeuger und drei Relationen. (Dies ist der einfachste Fall einer Spiegelungsgruppe nach Coxeter.)
 (c) Zeigen Sie, dass D_n von einer geeigneten Drehung und einer Spiegelung erzeugt wird und entwickeln Sie hieraus eine Präsentation. Überführen Sie die beiden Präsentationen ineinander durch Tietze–Transformationen.
 (d) Es gilt $D_3 \cong S_3$. Die Abelschmachtung ist $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$.

13. PRÄSENTATIONEN DER GRUPPEN $SL_2\mathbb{Z}$ UND $PSL_2\mathbb{Z}$ *Lang leben Euklid und Gauß!*

Ziel dieser Aufgabe ist es, Präsentationen zu erstellen für die beiden Matrixgruppen

$$SL_2\mathbb{Z} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid ad - bc = 1 \right\} \quad \text{und} \quad PSL_2\mathbb{Z} = SL_2\mathbb{Z} / \{\pm 1\}.$$

Als Erzeuger dienen uns hierzu folgende elementare Matrizen in $SL_2\mathbb{Z}$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu jeder Matrix $M \in SL_2\mathbb{Z}$ schreiben wir $\bar{M} = \{\pm M\}$ für ihre Klasse in $PSL_2\mathbb{Z}$.**Satz.** Für die Gruppen $SL_2\mathbb{Z}$ und $PSL_2\mathbb{Z}$ erhalten wir folgende Präsentationen:

$$SL_2\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid xyx = yxy, (xyx)^4 = 1 \rangle \cong \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle$$

$$PSL_2\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid xyx = yxy, (xyx)^2 = 1 \rangle \cong \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/2$$

Sie sind somit zentrale Quotienten der Zopfgruppe B_n modulo $\langle z_n^2 \rangle$ bzw. $\langle z_n \rangle$.

Den Beweis formuliere ich als Reihe folgender Übungen:

13.1. (a) Es gilt $S = XY, T = XYX = YXY, X = S^{-1}T, Y = T^{-1}S^2, T^2 = -1, T^4 = 1$.

Insbesondere erhalten wir hieraus die Gruppenhomomorphismen

$$h: H = \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle \rightarrow SL_2\mathbb{Z}, \quad s \mapsto S, \quad t \mapsto T,$$

$$k: K = \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^2 = 1 \rangle \rightarrow PSL_2\mathbb{Z}, \quad s \mapsto \bar{S}, \quad t \mapsto \bar{T}.$$

Wir zeigen zunächst, dass h surjektiv ist. Gleiches gilt dann auch für k .(b) Es gilt $SL_2\mathbb{Z} = \langle X, Y \rangle = \langle S, T \rangle$, somit sind h und k surjektiv. *Hinweis:* Durch Linksmultiplikation von $X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}$ können wir den euklidischen Algorithmus auf der ersten Spalte von M ausführen; die Fälle $a = 0$ oder $c = 0$ sind leicht.*Bemerkung:* Manche mögen's konkret. Versuchen Sie es mit folgender Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 29 & -8 \\ 11 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} = X^2 Y^{-1} X Y^{-1} X^3 (X Y X)^3 \\ = S^{-1} T S^{-1} T S^{-2} T S^{-1} T S^{-2} T (S^{-1} T)^3 T^3 \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass k injektiv ist und somit ein Gruppenisomorphismus.(c) Jedes Element der Gruppe K schreibt sich (eindeutig) in folgender Form:

$$w = s^{e_1} t s^{e_2} \cdots t s^{e_\ell}, \quad wt, \quad tw, \quad twt, \quad t, \quad 1$$

mit $\ell \geq 1$ und $e_1, e_2, \dots, e_\ell \in \{\pm 1\}$. Hierbei gilt $k(t) = \bar{T} \neq 1$ und $k(wt) \neq 1$.*Hinweis:* Produkte der Matrizen $S^{-1}T = X$ und $S^{-2}T = Y^{-1}$ liegen in $\mathbb{N}^{2 \times 2}$, und die Summe $a + b + c + d$ wächst mit der Länge des Produkts strikt an. Folgern Sie $k(w) \neq 1$ sowie $k(tw) \neq 1$ und $k(twt) \neq 1$. Somit ist k injektiv.

(d) Beweisen Sie den Satz: Geben Sie alle behaupteten Isomorphismen explizit an und begründen Sie jeweils, warum es sich um Isomorphismen handelt.

Zur Abrundung und als Ausklang überlege man sich folgende Zusätze:

(e) Für das Zentrum gilt $Z(SL_2\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ und $Z(PSL_2\mathbb{Z}) = \{\bar{1}\}$.(f) Was ist die Abelschmächungen von $PSL_2\mathbb{Z}$ bzw. $SL_2\mathbb{Z}$?(g) Mutige möchten vielleicht ebenso $GL_2\mathbb{Z}$ untersuchen.

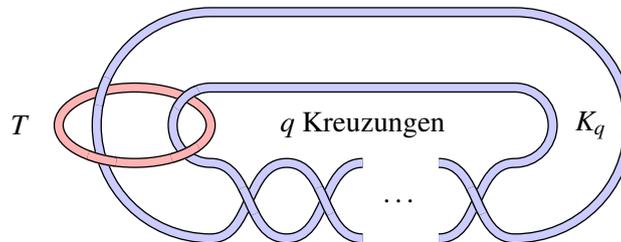
Übungsblatt 5: Knotengruppen

14. KOMPLEMENT UND AUSSENRAUM

Sind zwei Verschlingungen K und L in \mathbb{R}^3 bzw. in $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ isotop, so sind ihre Komplemente $\mathbb{R}^3 \setminus K$ und $\mathbb{R}^3 \setminus L$ homöomorph, ebenso $\mathbb{S}^3 \setminus K$ und $\mathbb{S}^3 \setminus L$ sowie ihre Außenräume $E(K) = \mathbb{S}^3 \setminus N(K)$ und $E(L) = \mathbb{S}^3 \setminus N(L)$. Für Knoten gilt die Umkehrung:

Satz (Gordon–Luecke 1989). *Seien $K, L \subset \mathbb{S}^3$ Knoten. Aus $E(K) \cong E(L)$ folgt $K \sim L$. Das heißt: Genau dann sind die Außenräume homöomorph, wenn die Knoten isotop sind.*

- 14.1.** Für den trivialen Knoten $T = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$ ist nicht nur die Tubenumgebung $N(T)$ ein Volltorus sondern auch der Außenraum $E(T) \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$. Man mache sich eine Zeichnung! Zum Beweis zerlege man $\mathbb{S}^3 = \{ (u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1 \}$ in $U = \{ (u, v) \in \mathbb{S}^3 \mid |u|^2 \leq 1/2 \}$ und $V = \{ (u, v) \in \mathbb{S}^3 \mid |v|^2 \leq 1/2 \}$.



- 14.2.** Die zweikomponentigen Verschlingungen $L_q = T \cup K_q$ mit $q = 1, 3, 5, 7, \dots$ sind paarweise nicht isotop, haben aber homöomorphe Außenräume $E(L_q) \cong E(L_p)$. *Hinweis:* Warum gilt $E(K_q) \not\cong E(K_p)$ für $p \neq q$? Es folgt $K_q \not\sim K_p$ und $L_q \not\sim L_p$.

15. KNOTENGRUPPEN BEI VERBUNDENER SUMME

Für die folgenden Übungen ist es hilfreich, Knoten $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ aufzuschneiden und als Schlingen darzustellen. Der Abschluss stiftet eine Bijektion der Isotopieklassen.

- 15.1.** Sei $K = A \# B$ verbundene Summe zweier Knoten A und B . Konstruieren Sie eine Präsentation der Gruppe (π_K, m_K, ℓ_K) aus denen für (π_A, m_A, ℓ_A) und (π_B, m_B, ℓ_B) . *Bemerkung:* Vornehm gesagt ist dies das Amalgam $\pi_K = (\pi_A * \pi_B) / (m_A = m_B)$.
- 15.2.** Die Inklusionen $E(A), E(B) \hookrightarrow E(A \# B)$ induzieren Gruppenhomomorphismen $\pi_A, \pi_B \rightarrow \pi_{A \# B}$. Sind sie injektiv? Erlauben sie sogar Retraktionen $\pi_{A \# B} \rightarrow \pi_A, \pi_B$? Zeigen Sie: $A \# B \sim \bigcirc$ impliziert $\pi_A \cong \pi_B \cong \pi_{\bigcirc}$ und sodann $A \sim B \sim \bigcirc$.
- 15.3.** Zeigen Sie die Multiplikativität des Färbungspolynoms: $P_G^x(A \# B) = P_G^x(A) \cdot P_G^x(B)$.
- 15.4.** Sei $A = 3_1$ die Kleeblattschlinge und A^\times ihr Spiegelbild. Die verbundene Summe $K = A \# A^\times$ heißt *Kreuzknoten* (engl. *square knot*), falsch geknüpft erhält man den *Großmutterknoten* $L = A \# A$ (engl. *granny knot*). Skizzieren Sie beide Knoten und beweisen Sie, dass $(\pi_K, m_K) \cong (\pi_L, m_L)$ aber dennoch $K \neq L$ gilt.

Satz (Whitten 1987). *Seien $K, L \subset \mathbb{S}^3$ Primknoten. Aus $\pi_K \cong \pi_L$ folgt $K \sim L$ (bis auf Orientierungen; aus Isomorphie $\pi_K \cong \pi_L$ folgt Isotopie $K \sim L, L^\times, L^!, L^*$.)*

16. REDUNDANTE UND RELEVANTE RELATIONEN

- 16.1.** Sei D ein ebenes Knotendiagramm und sei $\pi_D = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ die zugehörige Wirtinger-Präsentation. Zeigen Sie, dass jede Relation r_i redundant ist, also bereits aus den anderen Relationen $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n$ folgt. (Scherzfrage: Wenn man jede Relation weglassen kann, kann man dann auch alle weglassen?)
- 16.2.** Untersuchen Sie diese Frage für Diagramme von $(1, 1)$ -Schlingeln (also „langen Knoten“) und ihren Präsentationen $\pi_D = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n, x_0 = x_n \rangle$. Was gilt allgemein für (p, q) -Schlingel? Dies ist tatsächlich eine besondere Eigenschaft der Ebene: Für Flächen höheren Geschlechts gilt nichts derartiges.
- 16.3.** Sei $K = A \sharp B$ verbundene Summe zweier Schlingel A und B . Konstruieren Sie eine Präsentation der Gruppe $(\pi_K, \begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_p \\ z_1, \dots, z_r \end{smallmatrix})$ aus denen für $(\pi_A, \begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_q \end{smallmatrix})$ und $(\pi_B, \begin{smallmatrix} y_1, \dots, y_q \\ z_1, \dots, z_r \end{smallmatrix})$.
Bemerkung: Vornehm gesagt ist auch dies ein Amalgam $\pi_K = (\pi_A * \pi_B) / (y_i = z_i)$.
- 16.4.** Die Inklusionen $E(A), E(B) \hookrightarrow E(A \sharp B)$ induzieren Gruppenhomomorphismen $\pi_A, \pi_B \rightarrow \pi_{A \sharp B}$. Sind sie injektiv? Erlauben sie sogar Retraktionen $\pi_{A \sharp B} \rightarrow \pi_A, \pi_B$?

17. WILDE KNOTEN UND WILDE SPHÄREN

- 17.1.** Rechnen Sie das Beispiel von Artin-Fox aus der Vorlesung zu Ende: Wie zeigt man, dass das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma([-1, 1])$ nicht einfach zusammenhängend ist? Wenn Sie möchten, parametrisieren Sie die Einbettung $\gamma: [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ explizit.
- 17.2.** Skizzieren Sie eine Einbettung $f: \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, sodass beide Gebiete des Komplements $\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{S}^2) = A \sqcup B$ nicht einfach zusammenhängen, also $\pi_1(A, *) \neq \{1\}$ und $\pi_1(B, *) \neq \{1\}$ erfüllen. Warum ist dies für glatte Einbettungen unmöglich?

Übungsblatt 6: Flächen im Raum

18. DER SATZ VON ALEXANDER–SCHOENFLIES

- 18.1.** Zeichnen Sie eine (hinreichend komplizierte) glatte Einbettung $\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} S \subset \mathbb{R}^3$, etwa in Form einer Brezel oder eines Sombreros oder noch komplizierter.
- Ist die Fläche S in Morse–Position? Wie bringt man S in Morse–Position?
 - Führen Sie Chirurgie zwischen kritischen Werten aus (Explosionszeichnung).
 - Prüfen Sie an Ihrem konkreten Beispiel alle im Beweis gemachten Aussagen. Versuchen Sie durch ein tückisches Gegenbeispiel den Satz zu widerlegen oder zumindest Lücken im Beweis zu finden. Oder hat doch alles seine Richtigkeit?
- 18.2.** Chirurgie auf S entlang der Ebene $E_t = \mathbb{R}^2 \times \{t\}$ ergibt die Fläche $S_t \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>t}$.
- Wie verhalten sich Komponentenzahl $n(S_t)$ und Euler–Charakteristik $\chi(S_t)$ bei Passage eines kritischen Wertes: Maximum? Minimum? Sattelpunkt?
 - Wie verläuft die Funktion $t \mapsto \chi(S_t) - 2n(S_t)$? Was sind Start- und Endwert?
 - Warum besteht S_t , wie im Beweis behauptet, für alle t nur aus Sphären?
 - Zur Illustration diskutiere man naheliegende Varianten: Was passiert, wenn man nicht eine Sphäre S sondern einem Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} T \subset \mathbb{R}^3$ vorgibt?

Der letzte Punkt ist elegant und bemerkenswert, denn er nutzt geschickt die Flächenklassifikation mit Hilfe der Euler–Charakteristik. (Für Dimension 3 halten wir nichts dergleichen in Händen, daran scheitert der analoge Beweisversuch für $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^4$.)

Wir können aus dieser raffinierten Beweistechnik noch mehr gewinnen:

- 18.3.** Skizzieren Sie (hinreichend komplizierte) glatte Einbettungen $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} T \subset \mathbb{S}^3$ der Torusfläche. Jede zerlegt \mathbb{S}^3 in zwei Gebiete $\mathbb{S}^3 \setminus T = A \sqcup B$, also A, B offen zusammenhängend nicht-leer. Zudem gilt $\bar{A} = A \cup T$ und $\bar{B} = B \cup T$. (Warum?)
- Können beide Räume \bar{A} und \bar{B} zugleich Volltori sein?
 - Kann nur einer der beiden Räume ein Volltorus sein?
 - Kann weder \bar{A} noch \bar{B} ein Volltorus sein? Nach einigen Versuchen werden Sie dies verneinen wollen. Zeigen Sie stattdessen den folgenden Satz:

Satz (Alexander für glatte Einbettungen). *Jede glatte Einbettung $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ berandet auf beiden Seiten einen glatten Ball. Zusatz: Jede glatte Einbettung $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ berandet auf mindestens einer Seite einen glatten Volltorus.*

19. DER SEIFERT–ALGORITHMUS

- 19.1.** Zeichnen Sie ein (hinreichend kompliziertes) Knotendiagramm. Wenden Sie den Seifert–Algorithmus an und konstruieren Sie die Seifert–Fläche $S = \text{Seifert}(D)$. Wie bestimmt man effizient ihre Euler–Charakteristik und ihr Geschlecht?
- 19.2.** Berechnen Sie das Geschlecht der Twistknoten T_k wie in der Vorlesung skizziert.
- 19.3.** Seien D, D' zwei Diagramme desselben Knotentyps, das heißt, sie unterscheiden sich durch eine Folge von Reidemeister–Zügen. Zeigen Sie, dass die Flächen $S = \text{Seifert}(D)$ und $S' = \text{Seifert}(D')$ zueinander S–äquivalent sind, sich also nur durch das Ankleben bzw. Entfernen von Zylindern unterscheiden.

20. SEIFERT-FLÄCHEN UND SCHACHBRETTFÄRBUNG

Mancher mag vermuten, der Seifert-Algorithmus ließe sich noch weiter vereinfachen. Unter geeigneten Vorsichtsmaßnahmen ist dies tatsächlich möglich:

- 20.1.** Zu jedem unorientierten Diagramm D eines Knotens K oder einer Verschlingung definiert die Schachbrettfärbung eine Fläche $S = \text{Schach}(D) \subset \mathbb{R}^3$ mit $\partial S = K$. Diese Fläche kann orientierbar sein oder auch nicht: Geben Sie je ein Beispiel für Diagramme der Kleeblattschlinge und des Achterknotens.
- 20.2.** Angenommen $\text{Schach}(D)$ ist orientierbar. Wie verhält sich diese Eigenschaft unter Reidemeister-Zügen $D \sim D'$? Zeigen Sie an je einem Beispiel für R1, R2, R3, dass die Orientierbarkeit von $\text{Schach}(D')$ verloren gehen kann.
- 20.3.** Zu jedem Knoten K existieren Diagramme D , für die $\text{Schach}(D)$ orientierbar ist. Mit der passenden Orientierung gilt dann $\text{Schach}(D) = \text{Seifert}(D)$.
- 20.4.** Für Verschlingungen genügt nicht, dass $S = \text{Schach}(D)$ orientierbar ist, zudem müssen die Orientierungen auf dem Rand $K = \partial S$ kohärent sein. Dennoch gilt:

Satz. Für jede Verschlingung L existieren Diagramme D mit $\text{Schach}(D) = \text{Seifert}(D)$.

Beweis-Idee: Man wähle eine Seifert-Fläche und lege diese in Bandform.

- 20.5.** Betrachten Sie die Diagramme D_k der Twistknoten wie in der Vorlesung.
- Ist $\text{Schach}(D_k)$ orientierbar? Vergleichen Sie mit $\text{Seifert}(D_k) =: S_k$.
 - Finden Sie ein Diagramm $D'_k \sim D_k$ mit $\text{Schach}(D'_k) = \text{Seifert}(D'_k) =: S'_k$. Berechnen Sie für S_k und S'_k die Seifert-Formen:
 - Geben Sie explizit eine Basis von $H_1(S_k)$ und von $H_1(S'_k)$ an.
 - Erstellen Sie die Seifert-Matrix der Verschlingungszahlen in dieser Basis.

Übungsblatt 7: Seifert-Flächen und Invarianten

21. SEIFERT-FLÄCHEN UND SEIFERT-FORMEN

21.1. Bestimmen Sie für die Torusverschlingungen $T(2, n)$ für $n \in \mathbb{Z}$ das Alexander-Polynom und die Signatur sowie Geschlecht, Entknotungszahl, Chiralität.

(a) Konstruieren Sie eine Seifert-Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, etwa in Schachbrettform.

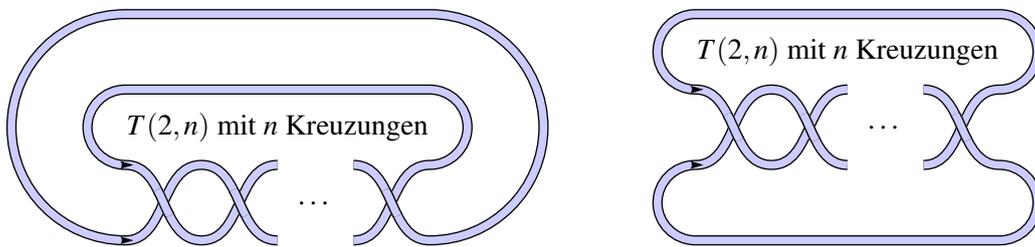
Bestimmen Sie eine Basis von $H_1(S)$ und die zugehörige Seifert-Matrix.

Leiten Sie hieraus die Signatur und das Alexander-Polynom von $T(2, n)$ ab.

(b) Versuchen Sie es auch rekursiv mit der Schienenrelation. Was ist leichter?

Probe: Vergleichen Sie zur Probe die Werte für $T(2, 0) = \bigcirc^2$ und $T(2, 1) = \bigcirc$ sowie die Hopf-Verschlingung $T(2, 2)$ und die Kleeblattschlinge $T(2, \pm 3)$.

Verallgemeinerung: Für Torusknoten $K = T(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist das Alexander-Polynom $\Delta_K = (q^{ab} - q^{-ab})(q - q^{-1}) / (q^a - q^{-a})(q^b - q^{-b})$.



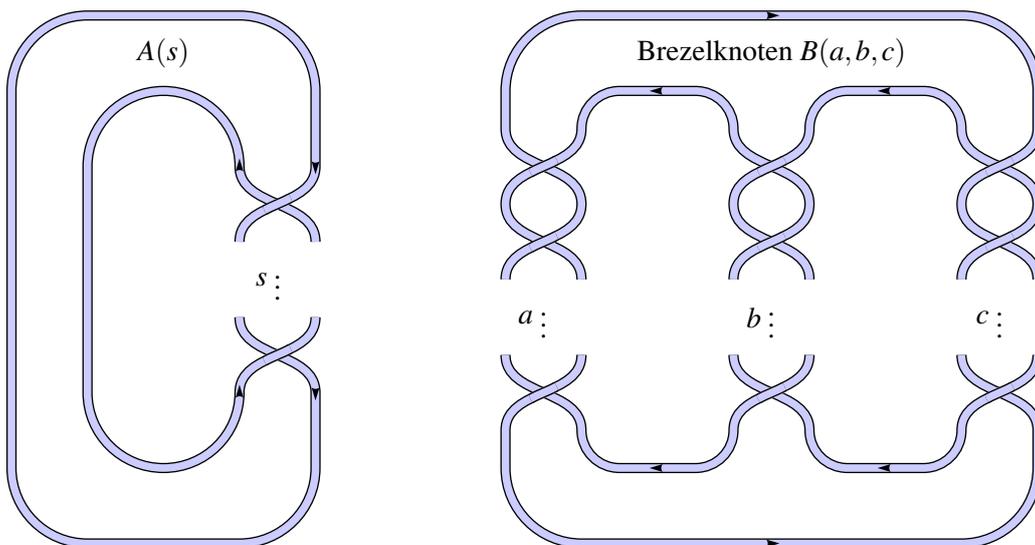
21.2. Bestimmen Sie Alexander-Polynom und Signatur für die antiparallele Torusverschlingung $A(s)$ mit $s \in 2\mathbb{Z}$ und die Brezelknoten $B(a, b, c)$ mit $a, b, c \in 2\mathbb{Z} + 1$.

(a) Mit einer Seifert-Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, Basis von $H_1(S)$ und Seifert-Matrix.

(b) Versuchen Sie es auch rekursiv mit der Schienenrelation. Was ist leichter?

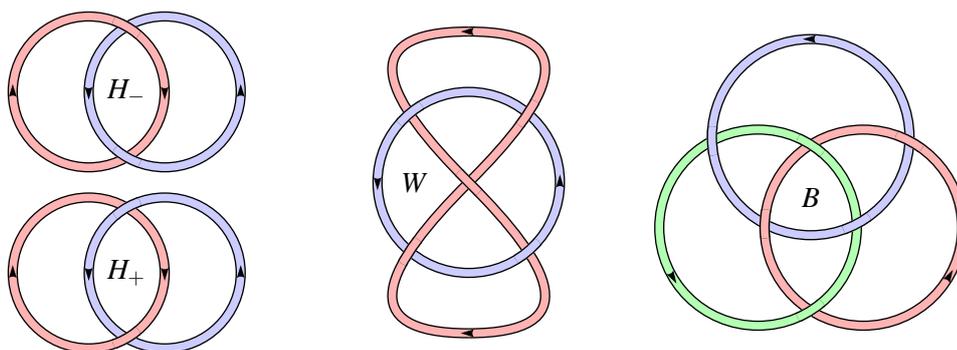
Probe: Sie kennen $B(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Bei Rotation gilt $B(a, b, c) = B(b, c, a)$, bei Spiegelung $B(a, b, c)^\times = B(-a, -b, -c)$, bei Reversion $B(a, b, c)^! = B(c, b, a)$.

Allgemein für $ab + bc + ca = -1$ gilt $\Delta = 1$, zum Beispiel für $(a, b, c) = (-3, 5, 7)$.



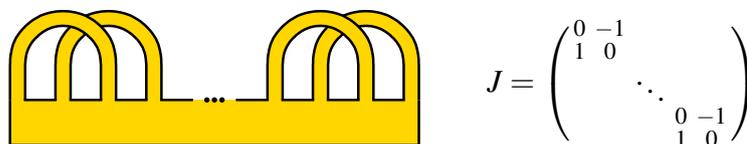
Bemerkung. Die Brezelknoten sind eine beliebte Beispielfamilie, da sie einerseits noch recht übersichtlich sind und doch andererseits schon sehr reichhaltig. Trotter hat in seinem Artikel *Non-invertible knots exist* (Topology 2, 1964, pp275–280) zeigen können, dass bis auf die offensichtlichen Ausnahmen tatsächlich $B(a,b,c) \neq B(c,b,a)$ gilt. Er hat so die lange vermutete Existenz nicht-reversibler Knoten bewiesen.

21.3. Betrachten Sie das rotationssymmetrisch orientierte Diagramm der Borromäischen Ringe. Berechnen Sie die Signatur und das Alexander-Polynom. Was passiert für die anderen 7 Orientierungen der drei Komponenten?



22. DAS UMKEHRPROBLEM

Statt zu einem gegebenen Knoten das Alexander-Polynom auszurechnen, können wir auch umgekehrt fragen: Welche Polynome $P \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ können als Alexander-Polynome von Knoten auftreten? Wir betrachten folgendes Modell der Fläche $S = F_{g,1}$:



- 22.1.** Für die gezeigte Einbettung $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und die übliche Basis $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ von $H_1(S)$ schreibt sich die Seifert-Form als $\theta(a_i, b_i) = 1$ für alle i und $= 0$ sonst. Demnach ist $\theta - \theta^\top$ die gezeigte Form J auf $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. (Man nennt J eine symplektische Form und daher $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ eine symplektische Basis.)
- 22.2.** Wie ändert sich die Form $\theta - \theta^\top$ wenn Sie die Einbettung der Fläche S im Raum verändern, mittels Kreuzungswechsel und Verdrillung der Bänder?
- 22.3.** Aus $M - M^\top = J$ folgt offenbar $\det(M + M^\top) \equiv 1 \pmod{2}$.
Für jeden Knoten K ist also die bilineare Form $\theta + \theta^\top$ nicht ausgeartet.
Leiten Sie die bessere Kongruenz $\det(M + M^\top) \equiv 1 \pmod{4}$ ab.
Für jeden Knoten K gilt also $\det(K) \equiv 1 \pmod{4}$. Wie zeigten wir dies zuvor?
- 22.4.** Sei M eine $2g \times 2g$ Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten. Wenn $M - M^\top = J$ gilt, dann gibt es einen Knoten K für den M eine Seifert-Matrix ist (bezüglich einer Seifert-Fläche S vom Geschlecht g und einer geeigneten Basis von $H_1(S)$.)
- 22.5.** Welche Polynome können als Alexander-Polynome von Knoten auftreten?