

Übungsblatt 0: Topologisches Vorspiel

Dieses Aufgabenblatt benutzt noch keine Ergebnisse der Vorlesung sondern soll den topologischen Vorbereitungen zuarbeiten und sie ein wenig illustrieren.

ALLGEMEINE HINWEISE

Die meisten Aufgaben sind leicht. Nur wenige sind trickreich, dann meist mit Hinweis. Schwere Fragen verstecken sich hier nur, wenn ich einen Fehler gemacht habe. Mit etwas Geduld sollten also alle Fragen auch ohne Literatur gut lösbar sein. (In Klammern stehen manchmal naheliegende Fragen, die ich mir einfach nicht verkneifen konnte. Sie sind oft provokativ, zu schwer, und/oder nicht ganz ernst gemeint. . . oder vielleicht doch?)

Wie detailliert sollen Antworten sein? Eine heikle Frage. . . Dies hier sind jedoch keine Klausuraufgaben! Vielmehr hoffe ich, dass Sie sich ein paar interessante aussuchen und daran lernen. Je nach Anspruch an die technische Virtuosität genügt manchmal eine Idee oder Skizze, aber gelegentlich ist auch eine genauere Ausführung lehrreich und wünschenswert. (Der Weg ist das Ziel? Manchmal hilft eben nur ausprobieren. . .)

1. HOMÖOMORPHISMEN

Zunächst ein paar Fingerübungen zum Aufwärmen.

- 1.1. Homöomorphie definiert eine Äquivalenzrelation zwischen topologischen Räumen. Bestimmen Sie zunächst alle zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} und anschließend ihre Äquivalenzklassen bezüglich Homöomorphie. (Und in \mathbb{R}^2 ?)
- 1.2. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Wenn X kompakt und Y hausdorffsch ist, dann ist f ein Homöomorphismus.
- 1.3. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, konvexe Teilmenge mit nicht-leerem Inneren. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $X \cong \mathbb{D}^n$.
- 1.4. Nennen Sie den Klassifikationssatz der kompakten Flächen, zunächst ohne dann mit Rand. (Siehe auch Martin Gardners Kurzgeschichte "No-sided professor".)

2. EINBETTUNGEN

- 2.1. Lässt sich \mathbb{S}^1 in \mathbb{R}^1 einbetten? (und \mathbb{S}^n in \mathbb{R}^n ?)
- 2.2. Konstruieren Sie eine Abbildung $f:]0, 1[\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ die injektiv und stetig aber keine Einbettung ist. Ist dies auch mit $[0, 1]$ möglich?
- 2.3. Nennen Sie Einbettungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ deren Komplement aus einer bzw. zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Gibt es eine Einbettung $f: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ deren Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{R})$ aus drei Zusammenhangskomponenten besteht?

3. AMBIENTE ISOTOPIE UND SYMMETRIEN

Bitte experimentieren Sie ein wenig mit Knoten und ambienter Isotopie, eventuell auch bereits mit Diagrammen und Reidemeister-Zügen. Zum Beispiel:

- 3.1. Ist die Kleeblattschlinge zu ihrem reversen Knoten äquivalent? (Dies ist derselbe Knoten in umgekehrter Durchlaufung.) Selbe Frage für den Achterknoten.

Sie können diese Frage mit guten Erfolgsaussichten auf weitere Knoten anwenden. Aber ziehen Sie keine voreiligen Schlüsse: Es gibt auch nicht-reversible Knoten!

- 3.2. Man konstruiere eine ambiente Isotopie des Achterknotens zu seinem Spiegelbild (zum Beispiel als Reidemeister-Züge der entsprechenden Diagramme).

Die analoge Frage für die Kleeblattschlinge ist schwieriger, und wurde erst 1914 von Dehn gelöst. Wir werden darauf zurückkommen, sobald wir die geeigneten Hilfsmittel entwickelt haben. (Sie können es aber natürlich jetzt schon probieren.)

4. KNOTEN IN \mathbb{R}^3 UND IN \mathbb{S}^3

- 4.1.** Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ mittels stereographischer Projektion. Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n ist also \mathbb{S}^n .
- 4.2.** Erläutern Sie, in welchem Sinne Knoten in \mathbb{R}^3 dasselbe sind wie Knoten in \mathbb{S}^3 .

5. DER ALEXANDER-TRICK

Die folgende Beobachtung zeigt, dass stetige Isotopien zwischen Knoten zu keiner interessanten Theorie führen, da in diesem Sinne alle Knoten isotop sind.

- 5.1.** Sei $f: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ein langer Knoten, also eine Einbettung mit $f(x) = (x, 0, 0)$ für $|x| \geq 1$. Wir definieren $H: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $H(t, x) = tf(x/t)$ für $0 < t \leq 1$ und $H(0, x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies definiert eine Isotopie zwischen dem anfänglichen Knoten $H_1 = f$ und dem trivialen Knoten H_0 . Wenn f differenzierbar ist, dann ist auch H differenzierbar in allen Punkten außer $(0, 0)$.

Der vorstehende Trick hat aber auch durchaus nützliche Seiten:

- 5.2.** Sei $f: \mathbb{D}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^n$ ein Homöomorphismus mit $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Dann gibt es eine Isotopie von f zur Identität $\text{id}_{\mathbb{D}^n}$ die den Rand punktweise festlässt. (Hinweis: Man benutze die vorangegangene Konstruktion und beweise alles Notwendige.)

Die folgende Umformulierung betrachtet Homöomorphismen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Anders gesagt, diese fixieren punktweise eine Umgebung von ∞ .

- 5.3.** Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, der außerhalb eines Kompaktums alle Punkte festlässt. Dann gibt es eine ambiente Isotopie $H: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die außerhalb eines Kompaktums alle Punkte festlässt, mit $H_0 = \text{id}$ und $H_1 = f$.

6. TOPOLOGIE DES \mathbb{R}^n

Die folgenden Aufgaben nennen drei grundlegende Ergebnisse der Topologie des \mathbb{R}^n und schlagen die einfachsten Fälle als Übung vor. (Wenn Sie den allgemeinen Fall beweisen können, um so besser! Das ist aber nicht Gegenstand dieser Vorlesung.)

- 6.1. Invarianz der Dimension:** Für $m \neq n$ sind \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n nicht homöomorph. Zeigen Sie dies zunächst für $m = 1$ und $n \geq 2$ (leicht). Kennen Sie einen Beweis für $m = 2$ und $n \geq 3$? und allgemein? (Zum Vergleich: für Diffeomorphismen ist die Frage viel leichter! Warum?)
- 6.2. Invarianz des Randes:** Jeder Homöomorphismus des Halbraums \mathbb{R}_+^n auf sich selbst bildet den Rand $\partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$ auf sich selbst ab. Zeigen Sie dies zunächst für $n = 1$ (leicht). Kennen Sie einen Beweis für $n = 2$? und allgemein?
- 6.3. Invarianz des Gebietes:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist f offen, also $V = f(U)$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie dies zunächst für $n = 1$. Kennen Sie einen Beweis für $n = 2$? und allgemein?

Übungsblatt 1: Der Satz von Reidemeister und erste Invarianten

1. BEWEGLICHKEIT POLYGONALER KNOTEN

Die folgende Überlegung wird im Beweis des Satzes von Reidemeister benutzt, um die Existenz regulärer Projektionen zu zeigen. Hierzu sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein polygonaler Knoten, gegeben durch die Eckpunkte $p_1, p_2, \dots, p_n = p_0 \in \mathbb{R}^3$.

- 1.1. Man bestimme $\varepsilon > 0$ so dass alle $p'_1, p'_2, \dots, p'_n = p'_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $|p'_k - p_k| < \varepsilon$ einen Knoten K' definieren und zeige, dass K und K' dann Δ -äquivalent sind.
- 1.2. Für jede Translation $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind K und $\tau(K)$ stets Δ -äquivalent.
- 1.3. Für jede Rotation $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind K und $\rho(K)$ stets Δ -äquivalent.
- 1.4. Für jedes $\lambda > 0$ sind K und λK stets Δ -äquivalent. (Und $\lambda < 0$?)

2. ZUM BEWEIS DES SATZES VON REIDEMEISTER

Es ist vielleicht ganz lehrreich, die Details der benutzten Lemmata auszuführen:

- 2.1. Jeder polygonale Knoten wird nach beliebig kleiner Drehung regulär projiziert: Die Menge der regulären Projektionsrichtungen ist offen und dicht in \mathbb{S}^2 .

Im Beweis wird das folgende topologische Argument benutzt:

- 2.2. Der Durchschnitt endlich vieler offener und dichter Mengen ist offen und dicht. (Man beweise: Ist A dicht in X und B offen in X , dann ist $A \cap B$ dicht in X .)

Dies erinnert an den Satz von Baire (Anmerkung zur Allgemeinbildung): Sei X ein vollständiger metrischer Raum oder lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist jeder abzählbare Durchschnitt offener und dichter Mengen in X selbst wieder dicht in X .

- 2.3. Jedes (polygonale) Knotendiagramm $D \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich zu einem (polygonalen) Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ hochheben so dass $\pi(K) = D$ mit kohärenten Über- und Unterkreuzungen. Je zwei solche Hochhebungen sind Δ -äquivalent.

3. REIDEMEISTER-ZÜGE UND KREUZUNGSZAHL

Die folgenden Beispiele sollen zeigen, dass der Satz von Reidemeister keinen Algorithmus zur Klassifikation von Knoten liefert — jedenfalls nicht ohne tiefgreifende Verfeinerungen! Das Problem ist, dass ein Algorithmus *alle* Züge durchprobieren müsste, und das sind unendlich viele. Die naive Idee, schlicht die Kreuzungszahl zu begrenzen, erzwingt zwar Endlichkeit, zerstört aber die Reidemeister-Äquivalenz.

- 3.1. Man konstruiere ein Diagramm des trivialen Knotens, das sich nicht trivialisieren lässt ohne die Kreuzungszahl zwischenzeitlich zu erhöhen. Für das konstruierte Beispiel beweise man diese Eigenschaft.
- 3.2. Man zeige (erneut), dass der Achterknoten zu seinem Spiegelbild äquivalent ist. Dies muss sich also durch Reidemeister-Züge darstellen lassen, wobei Anfangs- und End-Diagramm jeweils vier Kreuzungen haben. Welche Kreuzungszahlen haben die Zwischenschritte?

4. KNOTEN MIT BIS ZU VIER KREUZUNGEN

- 4.1. Es gibt keine Knotentypen mit minimaler Kreuzungszahl 1 oder 2. Nebenprodukt der erschöpfenden Suche: Es gibt bis auf Spiegelung genau eine Verschlingung mit Kreuzungszahl 2, nämlich die Hopf-Verschlingung.

4.2. Es gibt (bis auf Spiegelung) nur einen einzigen Knotentyp mit Kreuzungszahl 3, nämlich die Kleeblattschlinge.

4.3. Es gibt nur einen einzigen Knotentyp mit Kreuzungszahl 4, nämlich den Achterknoten. (Beide Spiegelbilder sind äquivalent, wie wir bereits gesehen haben.)

Um sicherzustellen, dass unsere Liste redundanzfrei ist und die angegebenen Kreuzungszahlen wirklich minimal sind, müssen wir diese drei Knotentypen unterscheiden:

4.4. Man bestimme die Anzahl der 3- und 5-Färbungen der Kleeblattschlinge und des Achterknotens. (Hinweis: Man kann sich etwas Arbeit ersparen, indem man einen fest gewählten Bogen stets mit 0 färbt. Warum?)

5. DIE BORROMÄISCHEN RINGE

5.1. Berechnen sie die paarweisen Verschlingungszahlen der Borromäischen Ringe.

5.2. Zeigen Sie, dass die Borromäischen Ringe untrennbar sind. (Hinweis: Für die Whitehead-Verschlingung haben wir die universelle Überlagerung bzgl. einer trivialen Komponente untersucht. Lässt sich dieser Trick hier auch anwenden?)

6. DER UNIVERSELLE FÄRBUNGSMODUL

Wie wir gesehen haben, ist die Anzahl der n -Färbungen eine nützliche Invariante. Lässt sich diese Information für alle n gleichzeitig ermitteln? Ja, und zwar wie folgt:

Zu einem Knotendiagramm D bezeichne x_1, \dots, x_k die Bögen. Man betrachte den freien \mathbb{Z} -Modul F mit Basis x_1, \dots, x_k . Darin sei R der Untermodul erzeugt von den Kreuzungsrelationen der Form $a - b + c - d$, wobei wir zyklisch um jede Kreuzung umlaufen. Der Quotient $\text{Col}(D) := F/R$ heiÙe der universelle Färbungsmodul des Diagramms D .

6.1. Aus dem universellen Färbungsmodul $\text{Col}(D)$ gewinnen wir den Modul aller n -Färbungen durch Spezialisierung, es gilt nämlich $\text{Col}_n(D) = \text{Hom}(\text{Col}(D), \mathbb{Z}/n)$. Dies rechtfertigt den Namen *universeller* Färbungsmodul.

6.2. Jeder Reidemeister-Zug $D \leftrightarrow D'$ induziert einen Isomorphismus $\text{Col}(D) \leftrightarrow \text{Col}(D')$ der zugehörigen universellen Färbungsmoduln. Der Isomorphietyp von $\text{Col}(D)$ ist also eine Invariante des durch D dargestellten Knotentyps K .

6.3. Bestimmen Sie den universellen Färbungsmodul eines Knotens Ihrer Wahl.

Die Berechnung kann man automatisieren (und dem Computer übertragen), indem man den Quotienten F/R durch die Matrix $M: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^k$ darstellt, die dem j -ten Basiselement die j -te Relation zuordnet. Die Elementarteiler dieser Matrix definieren den gesuchten Isomorphietyp: Ist $M \sim \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ mit $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ so ist $\text{Col}(D) = F/R \cong \mathbb{Z}/a_1 \oplus \mathbb{Z}/a_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_k$. Gilt zudem $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 0$ und $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_k$, so sind in dieser Darstellung die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k eindeutig festgelegt.

6.4. In der vorangehenden Notation seien die letzten ℓ Zahlen $a_{k-\ell+1}, \dots, a_k$ von 1 verschieden. Dann gilt für die Brückenzahl $br(K) \geq \ell$ und für die Entknotungszahl $u(K) \geq \ell - 1$. (Man denke an eine geeignete Primzahl.)

7. SCHRANKEN FÜR MINIMIERUNGS-INVARIANTEN

7.1. Für jeden Knotentyp K gehorchen die Entknotungszahl $u(K)$ und die minimale Kreuzungszahl $cr(K)$ der Ungleichung $u(K) \leq \frac{cr(K)-1}{2}$.

7.2. Man finde und beweise eine (möglichst interessante) Ungleichung, die Brückenzahl und Kreuzungszahl eines beliebigen Knotens in Beziehung setzt.

Übungsblatt 2: Seifert-Form und Alexander-Polynom

1. S-ÄQUIVALENZ VON SEIFERT-FLÄCHEN

- 1.1.** Seien D und D' zwei Diagramme desselben Knotens K . Nach dem Satz von Reidemeister unterscheiden sich D und D' durch eine Folge von Reidemeister-Zügen. Seien S, S' die Seifertflächen, die durch den Seifert-Algorithmus aus den Diagrammen D, D' entstehen. Zeigen Sie, dass diese Flächen S-äquivalent sind, sich also nur durch das Ankleben bzw. Entfernen von Zylindern unterscheiden.

2. BREZELKNOTEN

- 2.1.** Betrachten Sie die Brezelknoten $B(p, q, r)$ aus Abbildung 1 mit ungeraden ganzen Zahlen p, q, r . Zu der angegebenen Seifert-Fläche S und Basis von $H_1(S)$ bestimmen Sie die Seifert-Form und berechnen Sie daraus die Signatur und das Alexander-Polynom. Für $pq + qr + rp = -1$ gilt $\Delta_K = 1$. Diese Konstellation tritt zum Beispiel für den abgebildeten Fall $(p, q, r) = (-3, 5, 7)$ ein.

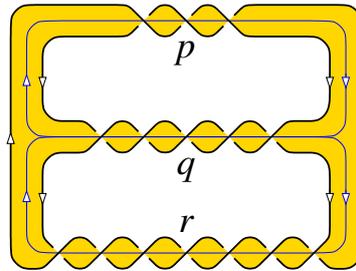


ABBILDUNG 1. Brezelknoten $B(p, q, r)$

Bemerkung. Die Brezelknoten sind eine beliebte Familie von Knoten, da sie einerseits noch recht übersichtlich sind und doch andererseits schon sehr reichhaltig. Man sieht zum Beispiel leicht die Rotationssymmetrie $B(p, q, r) = B(r, p, q)$. Bei Spiegelung gilt $B(p, q, r)^\times = B(-p, -q, -r)$ und bei Reversion gilt $B(p, q, r)^! = B(r, q, p)$.

Trotter hat in seinem Artikel *Non-invertible knots exist* (Topology 2, 1964, pp275–280) zeigen können, dass im Allgemeinen $B(p, q, r) \neq B(r, q, p)$ gilt. Er hat so die lange vermutete Existenz nicht-reversibler Knoten bewiesen.

3. TORUSKNOTEN

- 3.1.** Betrachten Sie den Torusknoten $T(2, p)$ mit ungeradem p . Konstruieren Sie hierzu eine Seifert-Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, bestimmen Sie eine Basis der ersten Homologiegruppe $H_1(S)$, berechnen Sie die Matrix der Seifert-Form bezüglich dieser Basis, und leiten Sie daraus die Signatur und das Alexander-Polynom ab. Welche Entknotungszahl und welches Geschlecht hat der Knoten $T(2, p)$? Welche dieser Knoten sind chiral, d.h. von ihrem Spiegelbild verschieden?

4. NOCHMAL DIE BORROMÄISCHEN RINGE

- 4.1.** Betrachten Sie das (rotationssymmetrische) orientierte Diagramm der Borromäischen Ringe aus der Vorlesung. Berechnen Sie die Signatur und das Alexander-Polynom. Was passiert für die anderen 7 Orientierungen der drei Komponenten?

5. DAS UMKEHRPROBLEM

5.1. Einmal anders herum gefragt: Welche Polynome $P \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ können als Alexander-Polynome von Knoten mit Geschlecht 1 auftreten?

Wir betrachten das Modell der Fläche $S = S_{g,1}$ aus folgender Abbildung.



- 5.2.** Für die gezeigte Einbettung $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und die übliche Basis $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ von $H_1(S)$ schreibt sich die Seifert-Form als $\theta(a_i, b_i) = 1$ für alle i und $= 0$ sonst. Demnach ist $\theta - \theta^*$ die (symplektische) Form J auf $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ bezüglich der (symplektischen) Basis $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$.
- 5.3.** Wie ändert sich die Form $\theta - \theta^*$ wenn Sie die Einbettung der Fläche S im Raum verändern, mittels Kreuzungswechsel und Verdrillung der Bänder?
- 5.4.** Aus $M - M^* = J$ folgt offenbar $\det(M + M^*) \equiv 1 \pmod{2}$.
Für jeden Knoten ist also die bilineare Form $\theta + \theta^*$ nicht ausgeartet.
- 5.5.** Leiten Sie aus $M - M^* = J$ die Kongruenz $\det(M + M^*) \equiv 1 \pmod{4}$ ab.
Für jeden Knoten K gilt also $\det(K) \equiv 1 \pmod{4}$.
- 5.6.** Sei M eine $2g \times 2g$ Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten. Wenn $M - M^* = J$ gilt, dann gibt es einen Knoten für den M eine Seifert-Matrix ist (bezüglich einer Seifert-Fläche S vom Geschlecht g und einer geeigneten Basis von $H_1(S)$.)
- 5.7.** Welche Polynome können als Alexander-Polynome von Knoten auftreten?

Übungsblatt 3: Gruppentheoretischer Werkzeugkasten

1. ERZEUGER DER SYMMETRISCHEN GRUPPE S_n

Es sei S_n die symmetrische Gruppe, bestehend aus allen Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, mit der Verknüpfung $f \circ g$ definiert durch $f \circ g(k) = f(g(k))$. Wir bezeichnen mit $\tau = (i, j)$ die Permutation definiert durch $\tau(i) = j$ und $\tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für alle $k \notin \{i, j\}$. Für $i \neq j$ ist dies die Transposition $i \leftrightarrow j$, für $i = j$ ist τ die Identität. Allgemeiner, für $\ell \geq 3$ verschiedene Elemente i_1, i_2, \dots, i_ℓ der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, bezeichnen wir mit $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)$ die Permutation definiert durch $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_\ell) = i_1$ und $\sigma(k) = k$ für alle $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$. Dies nennen wir einen ℓ -Zykel.

1.1. Jeder ℓ -Zykel schreibt sich als Produkt von $\ell - 1$ Transpositionen, nämlich

$$(i_1, i_2, \dots, i_\ell) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \cdots (i_{\ell-1}, i_\ell).$$

1.2. Jede Permutation schreibt sich als Produkt von Transpositionen:

Genauer: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt sich eindeutig als

$$\sigma = (i_n, n) \circ \cdots \circ (i_2, 2) \circ (i_1, 1)$$

wobei $1 \leq i_k \leq k$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. *Hinweis:* Induktion über n .
Man folgere daraus die Kardinalität von S_n .

1.3. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt sich als Produkt der Transpositionen $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$. *Hinweis:* Für $i \neq j$ gilt $(1, i)(1, j)(1, i) = (i, j)$.

1.4. Jede Permutation schreibt sich als Produkt der Transpositionen $\tau_k = (k, k+1)$.
Genauer: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt sich eindeutig als

$$\sigma = \zeta_n \circ \cdots \circ \zeta_2 \circ \zeta_1$$

wobei $\zeta_k = (i_k, \dots, k) = \tau_{i_k} \tau_{i_k+1} \cdots \tau_{k-1}$ mit $1 \leq i_k \leq k$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
(Für $i_k = k$ ist hierbei das Produkt leer, also $\zeta_k = \text{id}$; für $i_k = k-1$ gilt $\zeta_k = \tau_{i_k}$, für $i_k = k-2$ gilt $\zeta_k = \tau_{i_k} \tau_{i_k+1}$, etc.)

2. PRÄSENTATION DER SYMMETRISCHEN GRUPPE S_n

2.1. In S_n gelten die "offensichtlichen" Relationen $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ für $|i - j| \geq 2$ und $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ für $|i - j| = 1$ sowie $\tau_i^2 = 1$ für alle i . Die Gruppe

$$P_n = \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \mid \begin{array}{ll} t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i - j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i - j| = 1 \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

erlaubt also einen Epimorphismus $h: P_n \twoheadrightarrow S_n$ mit $t_k \mapsto \tau_k$ für alle $k = 1, \dots, n-1$.

Wir wollen zeigen, dass $h: P_n \twoheadrightarrow S_n$ ein Gruppenisomorphismus ist. Anders gesagt, die offensichtlichen Relationen erzeugen bereits alle Relationen:

2.2. Jedes Element $x \in P_n$ schreibt sich als $x = z_n \cdots z_2 z_1$ wobei $z_k = t_{i_k} t_{i_k+1} \cdots t_{k-1}$ mit $1 \leq i_k \leq k$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Man folgere daraus, dass $|P_n| \leq n!$ und schließlich dass $h: P_n \twoheadrightarrow S_n$ ein Gruppenisomorphismus ist.

3. PRÄSENTATION DER GRUPPEN $SL(2, \mathbb{Z})$ UND $PSL(2, \mathbb{Z})$

- 3.1.** Man zeige, dass $SL(2, \mathbb{Z})$ von $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.
Hinweis: Dies ist im Wesentlichen der euklidische Algorithmus!
- 3.2.** Man zeige die "offensichtlichen" Relationen $S^2 = T^3$ und $S^4 = T^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 Es gibt also einen Epimorphismus $\langle s, t \mid s^2 = t^3, s^4 = 1 \rangle \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$.
- 3.3.** Man beweise die Präsentation $SL(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2 = T^3, S^4 = 1 \rangle$.
 Anders gesagt, die offensichtlichen Relationen erzeugen bereits alle Relationen.
Hinweis: Jedes Element $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ schreibt sich als Wort in den Erzeugern S, T , also $A = S^{a_1} T^{b_1} \dots S^{a_k} T^{b_k}$ mit $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe der offensichtlichen Relationen kann man dies reduzieren zu $A = S^e T^{e_1} S T^{e_2} S \dots T^{e_\ell} S^f$ wobei $e \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt sowie für $\ell \geq 1$ auch $e_1, e_2, \dots, e_\ell \in \{+1, -1\}$ und $f \in \{0, 1\}$. In dieser Schreibweise ist $A = 1$ nur möglich für $\ell = 0$ und $e = 0$.
- 3.4.** Das Zentrum von $SL(2, \mathbb{Z})$ ist die zwei-elementige Untergruppe $\{\pm 1\}$.
 Für $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ gilt demnach $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle \bar{S}, \bar{T} \mid \bar{S}^2 = \bar{T}^3 = 1 \rangle$.

4. DIE GRUPPE $SL(n, \mathbb{Z})$ IST RESIDUELL ENDLICH

Eine Gruppe G heißt *residuell endlich*, wenn zu jedem Element $g \neq 1$ in G ein Homomorphismus $h: G \rightarrow H$ in eine endliche Gruppe H existiert, sodass $h(g) \neq 1$ in H .
 Trivialerweise ist jede endliche Gruppe residuell endlich.

- 4.1.** Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist residuell endlich.
- 4.2.** Man erläutere, wie der Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p$ einen Ringhomomorphismus $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z}/p)$ induziert. Ist dieser surjektiv?
 Induziert $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p$ einen Epimorphismus $GL(n, \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}/p)$?
 Induziert $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p$ einen Epimorphismus $SL(n, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(n, \mathbb{Z}/p)$?
- 4.3.** Die Gruppe $SL(n, \mathbb{Z})$ ist residuell endlich.

5. FREIE GRUPPEN SIND RESIDUELL ENDLICH

- 5.1.** Jede Untergruppe einer residuell endlichen Gruppe ist residuell endlich.
- 5.2.** Ist die von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $SL(2, \mathbb{Z})$ erzeugte Untergruppe frei?
Hinweis: Man betrachte $SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/2^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.
- 5.3.** Man zeige, dass die freie Gruppe F_2 von Rang 2 residuell endlich ist.
- 5.4.** Man zeige, dass die freie Gruppe F_r von endlichem Rang r residuell endlich ist.
- 5.5.** Ist auch jede freie Gruppe von unendlichem Rang residuell endlich?

Übungsblatt 4: Diverse Anwendungen und Aufgaben

1. FUNDAMENTALGRUPPE DER KLEEBLATTSCHLINGE

Wir betrachten ein minimales Diagramm der Kleeblattschlinge K .

- 1.1. Bestimmen Sie die Wirtinger-Präsentation der Gruppe π_K .
- 1.2. Bestimmen Sie alle Darstellungen $(\pi_K, m_K) \rightarrow (A_5, x)$ wobei $x = (12345)$.
- 1.3. Bestimmen Sie für jede dieser Darstellungen das Bild der Longitude l_k .
- 1.4. Welche Ergebnisse erhält man für das Spiegelbild K^* ?

2. FASERBÜNDEL

- 2.1. (Verklebelemma) Sei X ein topologischer Raum und $X = X_1 \cup X_2$ sodass beide Teilmengen X_1, X_2 offen sind (oder beide abgeschlossen). Seien $f_1: X_1 \rightarrow Y$ und $f_2: X_2 \rightarrow Y$ stetige Abbildungen die auf $A = X_1 \cap X_2$ übereinstimmen, also $f_1|_A = f_2|_A$ erfüllen. Wir definieren $f: X \rightarrow Y$ durch $f(x) = f_1(x)$ für $x \in X_1$, und $f(x) = f_2(x)$ für $x \in X_2$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- 2.2. Sei $f: E \rightarrow [a, c]$ ein Faserbündel, das über $[a, b]$ und über $[b, c]$ trivial ist, wobei $a < b < c$. Zeigen Sie, dass f über dem gesamten Intervall $[a, c]$ trivial ist.
- 2.3. Man zeige, dass jedes Faserbündel $f: E \rightarrow [0, 1]$ trivial ist.
- 2.4. Man zeige, dass jedes Faserbündel $f: E \rightarrow \mathbb{S}^1$ von der Form $E = (F \times [0, 1]) / \sim$ ist, wobei $(1, x) \sim (0, h(x))$ für einen Homöomorphismus $h: F \xrightarrow{\sim} F$.

3. GEFASERTE KNOTEN

- 3.1. Man zeige durch eine explizite Konstruktion, dass jeder Torusknoten gefasert ist. Anschließend versuche man für die Kleeblattschlinge eine aussagekräftige Skizze zu erstellen.
- 3.2. Unter allen Twistknoten sind nur der triviale Knoten, die Kleeblattschlinge und der Achterknoten gefasert.
Man zeige zunächst, dass alle anderen Twistknoten nicht gefasert sein können.
Man zeige/skizziere schließlich, dass der Achterknoten gefasert ist.

4. MONOTONE REIDEMEISTER-ZÜGE

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Verschlingungsdiagramm, parametrisiert durch eine glatte Immersion $f: \{1, \dots, n\} \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Sei $h: \{1, \dots, n\} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die gilt:

- $h(i, s) > h(j, s')$ für alle $i < j$ und $s, s' \in \mathbb{S}^1$.
- $h|_{\{i\} \times \mathbb{S}^1}$ hat nur ein Maximum/Minimum.

Dies ist zum Beispiel für ein absteigendes Diagramm der Fall: hierbei liegt das Minimum unmittelbar vor dem Maximum. Bei einem aufsteigenden Diagramm liegt entsprechend das Maximum unmittelbar vor dem Minimum.

- 4.1. Man zeige, dass D die triviale Verschlingung darstellt indem man eine Einbettung $F: \{1, \dots, n\} \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ konstruiert, die den dargestellten Knoten berandet.

Nach dem Satz von Reidemeister gibt es also eine Folge von R-Zügen $D \rightarrow \dots \rightarrow \bigcirc \dots \bigcirc$. Besser noch: man braucht hierbei die Kreuzungszahl niemals zu erhöhen:

- 4.2. (Monotone Trivialisierung) Man zeige, dass es eine Folge von R1/2/3/4-Zügen $D = D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_\ell = \bigcirc \dots \bigcirc$ gibt mit $cr(D_i) \geq cr(D_{i+1})$ für alle k .

Übungsblatt 5: Zopfgruppen

1. DAS ZENTRUM DER ZOPFGRUPPE

Wir betrachten die Zopfgruppe auf n Strängen, präsentiert durch

$$B_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Geometrisch ist hierbei s_i der Zopf, der die Stränge i und $i+1$ um eine halbe positive Drehung verdrillt und alle anderen Stränge fest lässt.

1.1. Für $k = 1, 2, \dots, n-1$ bestimme man $(s_1 s_2 \cdots s_{n-1}) s_k (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^{-1}$: zum einen algebraisch mit Hilfe der obigen Relationen, zum anderen geometrisch.

1.2. Man zeige mit Hilfe der obigen Präsentation, dass der Zopf $\tau_n = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ im Zentrum von B_n liegt. (Man prüfe dies auch geometrisch.)

Wir bezeichnen mit S_n die symmetrische Gruppe auf n Punkten, präsentiert durch

$$S_n = \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \mid \begin{array}{ll} t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right\rangle$$

Hierbei ist $t_i = (i, i+1)$ die Permutation, die i und $i+1$ vertauscht und alle anderen Punkte fest lässt. Aus diesen Präsentationen entnimmt man (diesmal algebraisch) den surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi: B_n \rightarrow S_n$ mit $s_k \mapsto t_k$ für $k = 1, \dots, n-1$.

1.3. Man bestimme das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n .

1.4. Man folgere daraus, dass $Z(B_n) \subset \ker(\pi)$ gelten muss.

Von diesen Vorbereitungen ausgehend, zeigt die Vorlesung, dass $Z(B_n) = \langle \tau_n \rangle \cong \mathbb{Z}$. (Als Übung beweise man dies ohne Vorlage.) Dabei stößt man auf folgende Teilfrage:

1.5. In der freien Gruppe $F_r = \langle x_1, \dots, x_r \mid - \rangle$ vom Rang r bestimme man alle Elemente, die mit x_k kommutieren. Man folgere hieraus das Zentrum von F_r .

1.6. Man zeige, dass aus $B_m \cong B_n$ notwendigerweise $m = n$ folgt.

Hinweis: In der Abelschmachung betrachte man das Bild des Zentrums.

2. OPERATION DER ZOPFGRUPPE DURCH KONJUGATION

2.1. (Hurwitz 1891) Es sei G eine Gruppe. Wir definieren $\xi_i: G^n \rightarrow G^n$ durch

$$\xi_i(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, \dots, g_n).$$

Man zeige, dass dies eine Operation $B_n \rightarrow \text{Sym}(G^n)$ mit $s_i \mapsto \xi_i$ definiert.

2.2. Es sei F_n die freie Gruppe auf n Erzeugern x_1, \dots, x_n . Wir definieren $\xi_i: F_n \rightarrow F_n$ als den Gruppenhomomorphismus mit

$$\xi_i: \begin{cases} x_j \mapsto x_j & \text{falls } j \notin \{i, i+1\}, \\ x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}. \end{cases}$$

Man zeige, dass dies eine Operation $B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ mit $s_i \mapsto \xi_i$ definiert.

3. DER ALEXANDER-TRICK UND DIE GRUPPE $\text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$

- 3.1.** $\text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$ mit der Verknüpfung von Abbildungen ist eine Gruppe.
Wir definieren hierauf eine Metrik durch $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{D}^n\}$.
Man zeige, dass $\text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$ damit eine topologische Gruppe wird.
- 3.2.** Isotopien, also stetige Abbildungen $H: [0, 1] \times \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ mit $H_t \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$ für alle $t \in [0, 1]$, entsprechen stetigen Wegen $h: [0, 1] \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$.

Der Satz von Alexander liefert zu $f \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$ eine explizite Isotopie zwischen $\text{id}_{\mathbb{D}^n}$ und f . Diese können wir nun interpretieren als einen Weg von $\text{id}_{\mathbb{D}^n}$ nach f in $\text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$. Es gilt jedoch noch viel mehr:

- 3.3.** $\text{Homeo}(\mathbb{D}^n | \partial\mathbb{D}^n)$ ist zusammenziehbar und auch lokal zusammenziehbar.

4. DIE ABBILDUNGSKLASSENGRUPPE $\mathcal{H}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$

Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{B}^2$ eine Menge von n Punkten und sei $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ die Teilmenge aller Homöomorphismen $f \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2)$ mit $f(P) = P$.

- 4.1.** Man zeige, dass $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ eine Untergruppe von $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2)$ ist, und in obiger Topologie abgeschlossen. (Ist dies ein Normalteiler?)

Sei $\text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ die Teilmenge aller Homöomorphismen, die in $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ zur Identität isotop sind. Mit anderen Worten, dies ist die Wegzusammenhangskomponente der Identität in $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$.

- 4.2.** $\text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ ist eine normale Untergruppe von $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$.
- 4.3.** In einer topologischen Gruppe ist jede offene Untergruppe auch abgeschlossen.
- 4.4.** In einem lokal wegzusammenhängenden Raum ist jede Wegzusammenhangskomponente offen, und daher auch abgeschlossen.
- 4.5.** Ist $\text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ offen in $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$?

Die Quotientengruppe

$$\mathcal{H}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P) = \text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P) / \text{Homeo}_0(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$$

heißt die *Abbildungsklassengruppe* der n -fach markierten Kreisscheibe (\mathbb{D}^2, P) . Ihre Elemente sind die Isotopieklassen $[f]$ von Homöomorphismen $f: (\mathbb{D}^2, P) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}^2, P)$ fix $\partial\mathbb{D}^2$.

- 4.6.** Da Isotopien nichts anderes sind als Wege in $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$, ist also

$$\mathcal{H}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P) = \pi_0 \text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$$

die Menge der Wegzusammenhangskomponenten der Gruppe $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$.

5. ZOPFGRUPPEN ALS ABBILDUNGSKLASSENGRUPPEN

Um die Abbildungsklassengruppe $\mathcal{H}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P)$ zu verstehen, wollen wir sie mit der Zopfgruppe $B_n = B_n \mathbb{B}^2$ vergleichen (gar "identifizieren"). Hierzu definieren wir

$$\varphi: \mathcal{H}(\mathbb{D}^2 | \partial\mathbb{D}^2, P) \rightarrow B_n \quad \text{durch} \quad [f] \mapsto [\tilde{H}^f(1_n)].$$

Hierbei ist 1_n der triviale Zopf auf n Strängen und $\tilde{H}^f: [0, 1] \times \mathbb{D}^2 \xrightarrow{\sim} [0, 1] \times \mathbb{D}^2$ mit $\tilde{H}^f(t, x) = (t, H^f(t, x))$ entsteht aus der Isotopie H^f des Alexander-Tricks.

- 5.1.** Die Abbildung φ ist wohldefiniert auf Abbildungsklassen.
- 5.2.** Statt H^f kann man jede Isotopie H von $H_0 = \text{id}$ nach $H_1 = f$ wählen.
- 5.3.** Man zeige, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.
- 5.4.** Man zeige, dass φ surjektiv ist.
- 5.5.** Man zeige, dass φ injektiv ist.

Übungsblatt 6: Das Jones-Polynom als Yang-Baxter-Invariante

Dieses Übungsblatt ist gar keines. Oder doch? Unser Ziel ist folgendes Ergebnis:

Satz. *Das Jones/HOMFLYPT-Polynom ist eine Yang-Baxter-Invariante.*

Hierzu konstruieren wir explizit einen Yang-Baxter-Operator, der es uns erlaubt, das Jones-Polynom als Spur einer geeigneten Zopfgruppen-Darstellung zu gewinnen. Die Aufgabe besteht im genauen, kritischen Nachvollziehen der in der Vorlesung vorgebrachten und hier wiedergegebenen Konstruktionen und Rechnungen.

1. AUFTRITT DES HAUPTDARSTELLERS: EIN ERSTAUNLICHER OPERATOR

Sei K ein kommutativer Ring mit Eins und sei $q \in K^\times$ ein invertierbares Element.

Sei V ein freier K -Modul mit Basis v_1, \dots, v_m . Wir definieren $c: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ durch

$$c(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} q^{m-1} v_i \otimes v_i & \text{falls } i = j, \\ q^m v_j \otimes v_i & \text{falls } i < j, \\ q^m v_j \otimes v_i + q^m(q^{-1} - q) v_i \otimes v_j & \text{falls } i > j. \end{cases}$$

Proposition. *Dieser Operator ist invertierbar: sein Inverses ist*

$$c^{-1}(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} q^{1-m} v_i \otimes v_i & \text{falls } i = j, \\ q^{-m} v_j \otimes v_i & \text{falls } i > j, \\ q^{-m} v_j \otimes v_i + q^{-m}(q - q^{-1}) v_i \otimes v_j & \text{falls } i < j. \end{cases}$$

Zum Beispiel finden wir im kleinsten interessanten Fall $m = 2$:

$$c = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad c^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} - q^{-3} & q^{-2} & 0 \\ 0 & q^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

(Alle Matrizen verstehen sich bezüglich der lexikographischen Basis von $V \otimes V$.)

Für $q = 1$ erhält man die Transposition $\tau: a \otimes b \mapsto b \otimes a$, oder als Matrix:

$$\tau = \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Sinne ist c eine Deformation der Transposition τ mit q als Parameter.

2. NACHWEIS DER ZOPFREATION (YANG-BAXTER-GLEICHUNG)

Die Transposition erfüllt offensichtlich die Zopfrelation (Yang-Baxter-Gleichung):

$$(\tau \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \tau).$$

Erstaunlicherweise gilt dies auch für die Deformation c :

Proposition. Der Operator c erfüllt die Zopfrelation (Yang-Baxter-Gleichung):

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c).$$

Zum Beweis schreiben wir den Operator c als

$$c(v_i \otimes v_j) = \lambda_{ij} v_j \otimes v_i + \varepsilon_{ij} v_i \otimes v_j$$

$$\text{mit } \lambda_{ij} = \begin{cases} q^{m-1} & \text{falls } i = j, \\ q^m & \text{falls } i \neq j, \end{cases} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} q^m(q^{-1} - q) & \text{falls } i > j, \\ 0 & \text{falls } i \leq j. \end{cases}$$

Nun rechnen wir $(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})$ furchtlos aus:

$$\begin{aligned} v_i \otimes v_j \otimes v_k &\xrightarrow{c \otimes \text{id}} \lambda_{ij} v_j \otimes v_i \otimes v_k + \varepsilon_{ij} v_i \otimes v_j \otimes v_k \\ &\xrightarrow{\text{id} \otimes c} \lambda_{ij} \lambda_{ik} v_j \otimes v_k \otimes v_i + \lambda_{ij} \varepsilon_{ik} v_j \otimes v_i \otimes v_k \\ &\quad + \varepsilon_{ij} \lambda_{jk} v_i \otimes v_k \otimes v_j + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} v_i \otimes v_j \otimes v_k \\ &\xrightarrow{c \otimes \text{id}} \lambda_{ij} \lambda_{ik} \lambda_{jk} v_k \otimes v_j \otimes v_i + \lambda_{ij} \lambda_{ik} \varepsilon_{jk} v_j \otimes v_k \otimes v_i \\ &\quad + \lambda_{ij} \varepsilon_{ik} \lambda_{ji} v_i \otimes v_j \otimes v_k + \lambda_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ji} v_j \otimes v_i \otimes v_k \\ &\quad + \varepsilon_{ij} \lambda_{jk} \lambda_{ik} v_k \otimes v_i \otimes v_j + \varepsilon_{ij} \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} v_i \otimes v_k \otimes v_j \\ &\quad + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} v_j \otimes v_i \otimes v_k + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} v_i \otimes v_j \otimes v_k \end{aligned}$$

Dies vergleichen wir mit $(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$:

$$\begin{aligned} v_i \otimes v_j \otimes v_k &\xrightarrow{\text{id} \otimes c} \lambda_{jk} v_i \otimes v_k \otimes v_j + \varepsilon_{jk} v_i \otimes v_j \otimes v_k \\ &\xrightarrow{c \otimes \text{id}} \lambda_{jk} \lambda_{ik} v_k \otimes v_i \otimes v_j + \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} v_i \otimes v_k \otimes v_j \\ &\quad + \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} v_j \otimes v_i \otimes v_k + \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} v_i \otimes v_j \otimes v_k \\ &\xrightarrow{\text{id} \otimes c} \lambda_{jk} \lambda_{ik} \lambda_{ij} v_k \otimes v_j \otimes v_i + \lambda_{jk} \lambda_{ik} \varepsilon_{ij} v_k \otimes v_i \otimes v_j \\ &\quad + \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} \lambda_{kj} v_i \otimes v_j \otimes v_k + \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} v_i \otimes v_k \otimes v_j \\ &\quad + \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} \lambda_{ik} v_j \otimes v_k \otimes v_i + \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} \varepsilon_{ik} v_j \otimes v_i \otimes v_k \\ &\quad + \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} \lambda_{jk} v_i \otimes v_k \otimes v_j + \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} v_i \otimes v_j \otimes v_k \end{aligned}$$

Als Differenz erhalten wir:

$$\begin{aligned} &(\lambda_{ij} \lambda_{ik} \lambda_{jk} - \lambda_{jk} \lambda_{ik} \lambda_{ij}) v_k \otimes v_j \otimes v_i \\ &+ (\lambda_{ij} \lambda_{ik} \varepsilon_{jk} - \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} \lambda_{ik}) v_j \otimes v_k \otimes v_i \\ &+ (\varepsilon_{ij} \lambda_{jk} \lambda_{ik} - \lambda_{jk} \lambda_{ik} \varepsilon_{ij}) v_k \otimes v_i \otimes v_j \\ &+ (\varepsilon_{ij} \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} \lambda_{jk} - \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}) v_i \otimes v_k \otimes v_j \\ &+ (\lambda_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} - \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} \varepsilon_{ik}) v_j \otimes v_i \otimes v_k \\ &+ (\lambda_{ij} \varepsilon_{ik} \lambda_{ji} - \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} \lambda_{kj} + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk}) v_i \otimes v_j \otimes v_k \end{aligned}$$

Nach Löschung identischer Terme sowie $\varepsilon_{ij}^2 \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk}^2$ bleibt:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{ij} \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ij} \lambda_{jk} - \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}) v_i \otimes v_k \otimes v_j \\ &+ (\lambda_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} - \varepsilon_{jk} \lambda_{ij} \varepsilon_{ik}) v_j \otimes v_i \otimes v_k \\ &+ (\lambda_{ij} \varepsilon_{ik} \lambda_{ji} - \lambda_{jk} \varepsilon_{ik} \lambda_{kj}) v_i \otimes v_j \otimes v_k \end{aligned}$$

Wir haben nun nachzuprüfen, dass diese Differenz für alle i, j, k verschwindet.

- (1) Im Falle $i = j = k$ verschwinden alle Terme wegen $\varepsilon_{ii} = 0$.
- (2) Sind i, j, k paarweise verschieden ($i \neq j, i \neq k, j \neq k$), dann löschen sich alle nicht-verschwindenden Terme paarweise aus: In der ersten Zeile gilt $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}$ denn $i > j$ und $i > k$ ist äquivalent zu entweder $i > j > k$ oder $i > k > j$. In der zweiten Zeile gilt $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}\varepsilon_{ik}$, denn $j > k$ und $i > k$ ist äquivalent zu entweder $i > j > k$ oder $i > k > j$. In der dritten Zeile gilt $\lambda_{ij} = \lambda_{kj}$.
- (3) Es bleibt schließlich der Fall zu klären, wo genau zwei der drei Indices i, j, k übereinstimmen. Sei zum Beispiel $i = j \neq k$. Die erste Zeile verschwindet dann wegen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} = 0$. Die zweite und dritte Zeile verschmelzen zu

$$(\lambda_{ij}\varepsilon_{ik}\lambda_{ji} - \lambda_{jk}\varepsilon_{ik}\lambda_{kj} - \varepsilon_{jk}\lambda_{ij}\varepsilon_{ik}) v_i \otimes v_i \otimes v_k.$$

Alle Terme verschwinden falls $i = j < k$. Im Fall $i = j > k$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda_{ij}\varepsilon_{ik}\lambda_{ji} &= q^{m-1} \cdot q^m(q^{-1} - q) \cdot q^{m-1}, \\ \lambda_{jk}\varepsilon_{ik}\lambda_{kj} &= q^m \cdot q^m(q^{-1} - q) \cdot q^m, \\ \varepsilon_{jk}\lambda_{ij}\varepsilon_{ik} &= q^m(q^{-1} - q) \cdot q^{m-1} \cdot q^m(q^{-1} - q),\end{aligned}$$

und die Terme $\lambda_{ij}\varepsilon_{ik}\lambda_{ji} - \lambda_{jk}\varepsilon_{ik}\lambda_{kj} - \varepsilon_{jk}\lambda_{ij}\varepsilon_{ik}$ löschen sich aus.

Damit ist gezeigt, dass c tatsächlich die Yang-Baxter-Gleichung erfüllt.

3. VON DER YANG-BAXTER-DARSTELLUNG ZUR MARKOV-INVARIANTE

Aus jedem Yang-Baxter-Operator c erhalten wir eine Zopfgruppen-Darstellung

$$\rho_n^c: B_n \rightarrow \text{Aut}(E^{\otimes n}) \quad \text{mit} \quad s_i \mapsto \text{id}^{\otimes(i-1)} \otimes c \otimes \text{id}^{\otimes(n-i-1)}.$$

Komponiert mit der Spur $\text{tr}_n: \text{End}(V^{\otimes n}) \rightarrow K$ erhalten wir die Abbildung

$$B_n \xrightarrow{\rho_n^c} \text{Aut}(V^{\otimes n}) \xrightarrow{\text{tr}_n} K.$$

In der Darstellungstheorie nennt man $\text{tr}_n \circ \rho_n^c$ auch den *Charakter* der Darstellung ρ_n^c . Dieser ist offenbar invariant unter Konjugation (dem zweiten Markov-Zug).

Leider erfüllt unser obiger Operator c nicht $\text{tr}_2^2(c) = \text{id}$, und somit ist $\text{tr}_n(\rho_n^c(\beta))$ nicht invariant unter Stabilisation (dem ersten Markov-Zug). Das Problem liegt darin, dass wir mit der Deformation von τ nach c auch die Spur deformieren müssen.

Wir definieren hierzu den Automorphismus

$$\mu: V \rightarrow V, \quad v_i \mapsto q^{2i-1-m} v_i.$$

Auf $V \otimes V$ erhalten wir hieraus den Automorphismus

$$\mu \otimes \mu: V \otimes V \rightarrow V \otimes V, \quad v_i \otimes v_j \mapsto q^{2i+2j-2-2m} v_i \otimes v_j.$$

Dies sind Diagonalmatrizen; für $m = 2$ zum Beispiel finden wir

$$\mu = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad \mu \otimes \mu = \begin{pmatrix} q^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Proposition. *Unser Yang-Baxter Operator $c: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ und der obige Automorphismus $\mu: V \rightarrow V$ erfreuen sich folgender Eigenschaften:*

- (m1) *Die partielle Spur ist $\text{tr}_2^2(c^{\pm 1} \circ (\mu \otimes \mu)) = \mu$.*
- (m2) *Es gilt die Kommutativität $c \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ c$.*

Die Bedingung (m2) ist klar, denn der Operator c respektiert den Grad $v_i \otimes v_j \mapsto i + j$.

Für die Bedingung (m1) betrachten wir $c \circ (\mu \otimes \mu)$:

$$v_i \otimes v_j \mapsto q^{2i+2j-2-2m} \cdot \begin{cases} q^{m-1} v_i \otimes v_i & \text{falls } i = j, \\ q^m v_j \otimes v_i & \text{falls } i < j, \\ q^m v_j \otimes v_i + q^m(q^{-1} - q) v_i \otimes v_j & \text{falls } i > j. \end{cases}$$

Die partielle Spur $\text{tr}_2^2(c \circ (\mu \otimes \mu))$ ergibt sich durch Summation über j :

$$v_i \mapsto q^{2i-1-m} [q^{2i-2} + \sum_{j<i} q^{2j-1}(q^{-1} - q)] v_i = q^{2i-1-m} v_i.$$

Das bedeutet $\text{tr}_2^2(c \circ (\mu \otimes \mu)) = \mu$. Die Rechnung für $\text{tr}_2^2(c^{-1} \circ (\mu \otimes \mu)) = \mu$ ist analog.

Korollar. *Wir haben eine Familie von Abbildungen $f_n: B_n \rightarrow K$ definiert durch*

$$f_n(\beta) = \text{tr}_n(\rho_n^c(\beta) \circ \mu^{\otimes n}).$$

Diese Familie ist eine Markov-Invariante, das heißt unverändert unter

- (M1) *Stabilisation: $f_{n+1}(\iota(\beta)s_n) = f_n(\beta)$,*
- (M2) *Konjugation: $f_n(\beta) = f_n(\alpha^{-1}\beta\alpha)$.*

Dies folgt unmittelbar aus den obigen Eigenschaften (m1) und (m2).

4. IDENTIFIKATION ALS VERALLGEMEINERTES JONES-POLYNOM

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, lässt sich das Jones-Polynom V_2 zum HOM-FLYPT-Polynom V_m verallgemeinern. Dieses lässt sich wie folgt charakterisieren.

Satz. *Zu jeder natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Verschlingungsinvariante $V_m: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$, die dem trivialen Knoten \bigcirc das Polynom*

$$V_m(\bigcirc) = \frac{q^{-m} - q^m}{q^{-1} - q} = q^{-m+1} + q^{-m+3} + \dots + q^{m-3} + q^{m-1}$$

zuordnet und die folgende Schienenrelation erfüllt

$$q^{-m} \cdot V_m(\begin{smallmatrix} \nearrow & \searrow \\ \searrow & \nearrow \end{smallmatrix}) - q^m \cdot V_m(\begin{smallmatrix} \searrow & \nearrow \\ \nearrow & \searrow \end{smallmatrix}) = (q^{-1} - q) \cdot V_m(\begin{smallmatrix} \nearrow & \searrow \\ \nearrow & \searrow \end{smallmatrix}).$$

Die Eindeutigkeit einer solchen Invariante lässt sich leicht mittels Schieneninduktion beweisen. Die Existenz hingegen ist schwieriger. In der Vorlesung wurde dies zuvor mit einer kombinatorisch-rekursiven Konstruktion über Verschlingungsdiagramme erreicht.

Mittels Yang-Baxter-Darstellungen der Zopfgruppen erhalten wir nun einen zweiten, unabhängigen Existenzbeweis durch eine algebraische Konstruktion. Wir betrachten den für unsere Fragestellung universellen Ring $K = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ und fassen alle Ergebnisse in folgendem schönen Satz zusammen:

Satz. Das Jones/HOMFLYPT-Polynom ist eine Yang-Baxter-Invariante.

Genauer: Über $K = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ sei V der freie K -Modul mit Basis v_1, \dots, v_m .

(1) Auf $V \otimes V$ operiert der Yang-Baxter-Operator c mittels

$$c(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} q^{m-1} v_i \otimes v_i & \text{falls } i = j, \\ q^m v_j \otimes v_i & \text{falls } i < j, \\ q^m v_j \otimes v_i + q^m(q^{-1} - q) v_i \otimes v_j & \text{falls } i > j. \end{cases}$$

Dieser Operator erfüllt die Gleichung $q^{-m}c - q^m c^{-1} = (q^{-1} - q) \text{id}_{V \otimes V}$.
Anders gesagt, sein Minimalpolynom ist $X^2 - q^m(q^{-1} - q)X - q^{2m}$.

(2) Zu c definieren wir den Markov-Operator $\mu : V \rightarrow V$ durch $v_i \mapsto q^{2i-1-m} v_i$.
Dieser führt zu der Markov-invarianten Familie $f_n : B_n \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ mit

$$f_n(\beta) = \text{tr}_n(\rho_n^c(\beta) \circ \mu^{\otimes n})$$

und definiert somit eine Verschlingungs-Invariante $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$.

(3) Die Invariante f bildet den trivialen Knoten \bigcirc ab auf

$$f(\bigcirc) = f_1(1) = \text{tr}_1(\mu) = q^{-m+1} + q^{-m+3} + \dots + q^{m-3} + q^{m-1}.$$

Das Minimalpolynom von c impliziert die Schienenrelation

$$q^{-m} \cdot f(\begin{smallmatrix} \nearrow & \searrow \\ \searrow & \nearrow \end{smallmatrix}) - q^m \cdot f(\begin{smallmatrix} \searrow & \nearrow \\ \nearrow & \searrow \end{smallmatrix}) = (q^{-1} - q) \cdot f(\begin{smallmatrix} \nearrow & \\ & \searrow \end{smallmatrix}).$$

Daraus folgt, dass $f = V_m$ das verallgemeinerte Jones-Polynom ist. □

5. YANG-BAXTER-OPERATOREN IN DIMENSION 2

Die obige Rechnung weist zwar alle gewünschten algebraischen Eigenschaften unseres Operators $V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ nach, es bleibt aber die Frage, wie man solche Lösungen überhaupt erst findet. In Dimension 2 kann man folgenden Ansatz betrachten:

5.1. Wir betrachten den freien K -Modul V mit Basis (v_1, v_2) .

Auf $V \otimes V$ mit Basis $(v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2)$ operiert

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Man zeige, dass dies genau dann ein Yang-Baxter-Operator ist wenn gilt

$$adb = adc = ad(a - d) = 0,$$

$$\begin{aligned} p^2 a &= pa^2 + abc, & q^2 a &= qa^2 + abc, \\ p^2 d &= pd^2 + dbc, & q^2 d &= qd^2 + dbc. \end{aligned}$$

Hinweis: Man kann dies per Hand ausrechnen, genügend Geduld vorausgesetzt. Mit einem Computer-Algebra-System ist es leichter.

Verallgemeinerung: Durch geschicktes Rechnen kann man alle Yang-Baxter-Operatoren in Dimension 2 klassifizieren, siehe J. Hietarinta: *Solving the two-dimensional constant quantum Yang-Baxter equation*. J. Math. Phys. 34 (1993) 1725–1756.