

La théorie des jeux et l'hypothèse de rationalité

Michael Eisermann

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm



8 novembre 2007

Séminaire Mathématiques et Applications

Dans la série « comment écrire une thèse en maths
puis décrocher le prix Nobel d'économie »

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- 1** Qu'est-ce qu'un jeu ?
 - Aspects formels
 - Formalisation mathématique
 - Exemples classiques
- 2** Le théorème de Nash
 - Qu'est-ce qu'un équilibre ?
 - Stratégies mixtes
 - Le théorème de Nash
- 3** L'hypothèse de rationalité
 - Qu'est-ce que la rationalité ?
 - Une expérience socio-économique
 - Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

1 Qu'est-ce qu'un jeu ?

- Aspects formels
- Formalisation mathématique
- Exemples classiques

2 Le théorème de Nash

- Qu'est-ce qu'un équilibre ?
- Stratégies mixtes
- Le théorème de Nash

3 L'hypothèse de rationalité

- Qu'est-ce que la rationalité ?
- Une expérience socio-économique
- Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Prélude

- À quoi sert la théorie ?
- Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

- Aspects formels
- Formalisation mathématique
- Exemples classiques

Le théorème de Nash

- Qu'est-ce qu'un équilibre ?
- Stratégies mixtes
- Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

- Qu'est-ce que la rationalité ?
- Une expérience socio-économique
- Est-il rationnel d'être irrationnel ?
- Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

- Résumé
- Perspectives
- Références

1 Qu'est-ce qu'un jeu ?

- Aspects formels
- Formalisation mathématique
- Exemples classiques

2 Le théorème de Nash

- Qu'est-ce qu'un équilibre ?
- Stratégies mixtes
- Le théorème de Nash

3 L'hypothèse de rationalité

- Qu'est-ce que la rationalité ?
- Une expérience socio-économique
- Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Prélude

- À quoi sert la théorie ?
- Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

- Aspects formels
- Formalisation mathématique
- Exemples classiques

Le théorème de Nash

- Qu'est-ce qu'un équilibre ?
- Stratégies mixtes
- Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

- Qu'est-ce que la rationalité ?
- Une expérience socio-économique
- Est-il rationnel d'être irrationnel ?
- Est-il irrationnel d'être rationnel ?

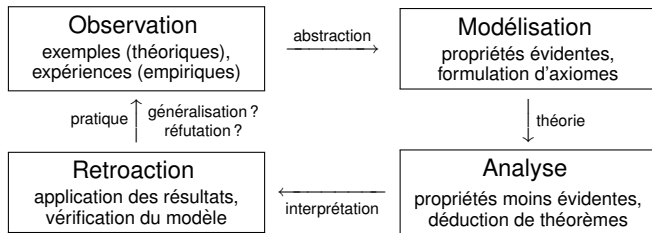
Conclusion

- Résumé
- Perspectives
- Références

À quoi sert la théorie ?

La théorie des jeux analyse des situations de conflit et de coopération.

Schéma général — cercle d'interaction entre pratique et théorie :



Comme toute théorie sociale, elle admet deux interprétations :

- descriptive — décrit et explique le comportement observé.
- normative — prescrit et optimise le comportement à adopter.

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

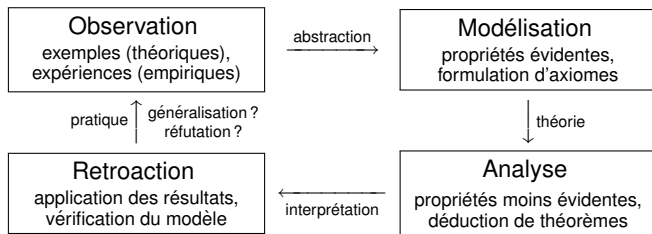
Perspectives

Références

À quoi sert la théorie ?

La théorie des jeux analyse des situations de conflit et de coopération.

Schéma général — cercle d'interaction entre pratique et théorie :



Comme toute théorie sociale, elle admet deux interprétations :

- descriptive — décrit et explique le comportement observé.
- normative — prescrit et optimise le comportement à adopter.

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

The Theory of Games and Economic Behavior (1944).



John von Neumann (Budapest 1903–Washington 1957)

Mathématicien américain d'origine hongroise, professeur à Berlin et à Hambourg (1926-1930) puis à Princeton (1930-1957).



Oskar Morgenstern (Görlitz 1902 – Princeton 1977)

Mathématicien et économiste américain d'origine allemande, professeur à Vienne (1929-1938) puis à Princeton (1939-1970) et à l'université de New York (1970-1977).

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références



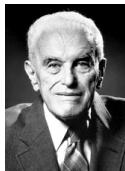
John Forbes Nash (Bluefield/WV 1928 –)

Mathématicien américain, chercheur émérite à Princeton. Prix Nobel d'économie en 1994 pour ses travaux en théorie des jeux.



Reinhard Selten (Breslau 1930 –)

Économiste allemand, professeur émérite à l'Université de Bonn. Prix Nobel d'économie en 1994 pour ses travaux sur la rationalité limitée et l'économie expérimentale.



John C. Harsanyi (Budapest 1920 – Berkeley/CA 2000)

Économiste hongrois, naturalisé américain. Prix Nobel d'économie en 1994 pour ses contributions à la théorie des jeux à information incomplète.

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Quelques prix Nobel d'économie récents

Jeux et rationalité

M. Eisermann

2005 : pour l'analyse de conflit et de coopération en théorie des jeux

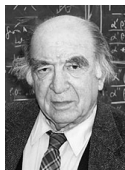


Robert J. Aumann
(Frankfurt 1930 –)



Thomas C. Schelling
(Oakland/CA 1950 –)

2007 : pour la théorie du *design des mécanismes*



Leonid Hurwicz
(Moscou 1917 –)



Eric S. Maskin
(New York/NY 1950 –)



Roger B. Myerson
(Boston/MA 1951 –)

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

1 Qu'est-ce qu'un jeu ?

- Aspects formels
- Formalisation mathématique
- Exemples classiques

2 Le théorème de Nash

- Qu'est-ce qu'un équilibre ?
- Stratégies mixtes
- Le théorème de Nash

3 L'hypothèse de rationalité

- Qu'est-ce que la rationalité ?
- Une expérience socio-économique
- Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Nombre de joueurs :

- 1 un joueur : optimisation, théorie de contrôle.
- 2 deux joueurs : le cas classique et le mieux compris.
- 3 plusieurs joueurs : plus riche/compliqué à cause des coalitions.

Structure temporelle :

- tours alternés : échecs, go
- tours simultanés : pierre-papier-ciseaux, jeux en réseau.

Facteurs aléatoires :

- déterministe : échecs, go
- probabiliste : jeux de cartes, la bourse, déclaration des revenus

Accès aux informations :

- information complète : échecs, go, jeux à cartes ouvertes
- information partielle : poker, examen, recrutement, enchère

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Nombre de joueurs :

- 1 un joueur : optimisation, théorie de contrôle.
- 2 deux joueurs : le cas classique et le mieux compris.
- 3 plusieurs joueurs : plus riche/compliqué à cause des coalitions.

Structure temporelle :

- tours alternés : échecs, go
- tours simultanés : pierre-papier-ciseaux, jeux en réseau.

Facteurs aléatoires :

- déterministe : échecs, go
- probabiliste : jeux de cartes, la bourse, déclaration des revenus

Accès aux informations :

- information complète : échecs, go, jeux à cartes ouvertes
- information partielle : poker, examen, recrutement, enchère

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Nombre de joueurs :

- 1 un joueur : optimisation, théorie de contrôle.
- 2 deux joueurs : le cas classique et le mieux compris.
- 3 plusieurs joueurs : plus riche/compliqué à cause des coalitions.

Structure temporelle :

- tours alternés : échecs, go
- tours simultanés : pierre-papier-ciseaux, jeux en réseau.

Facteurs aléatoires :

- déterministe : échecs, go
- probabiliste : jeux de cartes, la bourse, déclaration des revenus

Accès aux informations :

- information complète : échecs, go, jeux à cartes ouvertes
- information partielle : poker, examen, recrutement, enchère

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Nombre de joueurs :

- 1 un joueur : optimisation, théorie de contrôle.
- 2 deux joueurs : le cas classique et le mieux compris.
- 3 plusieurs joueurs : plus riche/compliqué à cause des coalitions.

Structure temporelle :

- tours alternés : échecs, go
- tours simultanés : pierre-papier-ciseaux, jeux en réseau.

Facteurs aléatoires :

- déterministe : échecs, go
- probabiliste : jeux de cartes, la bourse, déclaration des revenus

Accès aux informations :

- information complète : échecs, go, jeux à cartes ouvertes
- information partielle : poker, examen, recrutement, enchère

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Commençons par le cas (très particulier) d'un seul joueur.

- On note S l'ensemble des stratégies à sa disposition.
- On note $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ le gain, aussi appelée *fonction d'utilité*.
- Le joueur essaie de choisir s de sorte que $g(s)$ soit maximal.

Exemple (faire un bon exposé)

S est l'ensemble des exposés d'une heure sur la théorie des jeux,
 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ mesure l'enthousiasme (supposé) des auditeurs.
Je cherche $s \in S$ tel que $g(s)$ soit maximal, mais c'est difficile . . .

Plus généralement : maximisation des bénéfices et minimisation des coûts dans toute sorte d'activité humaine (économique, militaire, . . .)

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Commençons par le cas (très particulier) d'un seul joueur.

- On note S l'ensemble des stratégies à sa disposition.
- On note $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ le gain, aussi appelée *fonction d'utilité*.
- Le joueur essaie de choisir s de sorte que $g(s)$ soit maximal.

Exemple (faire un bon exposé)

S est l'ensemble des exposés d'une heure sur la théorie des jeux,
 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ mesure l'enthousiasme (supposé) des auditeurs.
Je cherche $s \in S$ tel que $g(s)$ soit maximal, mais c'est difficile . . .

Plus généralement : maximisation des bénéfices et minimisation des coûts dans toute sorte d'activité humaine (économique, militaire, . . .)

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Commençons par le cas (très particulier) d'un seul joueur.

- On note S l'ensemble des stratégies à sa disposition.
- On note $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ le gain, aussi appelée *fonction d'utilité*.
- Le joueur essaie de choisir s de sorte que $g(s)$ soit maximal.

Exemple (faire un bon exposé)

S est l'ensemble des exposés d'une heure sur la théorie des jeux,
 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ mesure l'enthousiasme (supposé) des auditeurs.
Je cherche $s \in S$ tel que $g(s)$ soit maximal, mais c'est difficile . . .

Plus généralement : maximisation des bénéfices et minimisation des coûts dans toute sorte d'activité humaine (économique, militaire, . . .)

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Commençons par le cas (très particulier) d'un seul joueur.

- On note S l'ensemble des stratégies à sa disposition.
- On note $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ le gain, aussi appelée *fonction d'utilité*.
- Le joueur essaie de choisir s de sorte que $g(s)$ soit maximal.

Exemple (faire un bon exposé)

S est l'ensemble des exposés d'une heure sur la théorie des jeux,
 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ mesure l'enthousiasme (supposé) des auditeurs.
Je cherche $s \in S$ tel que $g(s)$ soit maximal, mais c'est difficile . . .

Plus généralement : maximisation des bénéfices et minimisation des coûts dans toute sorte d'activité humaine (économique, militaire, . . .)

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Commençons par le cas (très particulier) d'un seul joueur.

- On note S l'ensemble des stratégies à sa disposition.
- On note $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ le gain, aussi appelée *fonction d'utilité*.
- Le joueur essaie de choisir s de sorte que $g(s)$ soit maximal.

Exemple (faire un bon exposé)

S est l'ensemble des exposés d'une heure sur la théorie des jeux,
 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ mesure l'enthousiasme (supposé) des auditeurs.
Je cherche $s \in S$ tel que $g(s)$ soit maximal, mais c'est difficile . . .

Plus généralement : maximisation des bénéfices et minimisation des coûts dans toute sorte d'activité humaine (économique, militaire, . . .)

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

**Formalisation
mathématique**

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Regardons ensuite un jeu à deux joueurs, nommés A et B.

- On note S_A et S_B les ensembles des stratégies disponibles, et $g_A, g_B: S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions d'utilité respectives.
- A essaie de maximiser $g_A(s_A, s_B)$ en choisissant $s_A \in S_A$ et B essaie de maximiser $g_B(s_A, s_B)$ en choisissant $s_B \in S_B$.

L'interaction résulte du couplage mutuel

En général $g_A(s_A, s_B)$ dépend de s_A et aussi de s_B .

De même, $g_B(s_A, s_B)$ dépend de s_B et aussi de s_A .

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Regardons ensuite un jeu à deux joueurs, nommés A et B.

- On note S_A et S_B les ensembles des stratégies disponibles, et $g_A, g_B: S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions d'utilité respectives.
- A essaie de maximiser $g_A(s_A, s_B)$ en choisissant $s_A \in S_A$ et B essaie de maximiser $g_B(s_A, s_B)$ en choisissant $s_B \in S_B$.

L'interaction résulte du couplage mutuel

En général $g_A(s_A, s_B)$ dépend de s_A et aussi de s_B .

De même, $g_B(s_A, s_B)$ dépend de s_B et aussi de s_A .

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Regardons ensuite un jeu à deux joueurs, nommés A et B.

- On note S_A et S_B les ensembles des stratégies disponibles, et $g_A, g_B: S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions d'utilité respectives.
- A essaie de maximiser $g_A(s_A, s_B)$ en choisissant $s_A \in S_A$ et B essaie de maximiser $g_B(s_A, s_B)$ en choisissant $s_B \in S_B$.

L'interaction résulte du couplage mutuel

En général $g_A(s_A, s_B)$ dépend de s_A et aussi de s_B .
De même, $g_B(s_A, s_B)$ dépend de s_B et aussi de s_A .

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Pierre-papier-ciseaux

Un jeu d'enfants classique :

		B		
		pierre	papier	ciseaux
A	pierre	0 / 0	-1 / +1	+1 / -1
	papier	+1 / -1	0 / 0	-1 / +1
	ciseaux	-1 / +1	+1 / -1	0 / 0

C'est un jeu compétitif.

Ce jeu est à *somme zéro* et donc *strictement compétitif* : le gain de *A* augmente si et seulement si le gain de *B* diminue, et réciproquement.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Pierre-papier-ciseaux

Un jeu d'enfants classique :

		B		
		pierre	papier	ciseaux
A	pierre	0 / 0	+1 / -1	-1 / +1
	papier	+1 / -1	0 / 0	-1 / +1
	ciseaux	-1 / +1	+1 / -1	0 / 0

C'est un jeu compétitif.

Ce jeu est à *somme zéro* et donc *strictement compétitif* : le gain de *A* augmente si et seulement si le gain de *B* diminue, et réciproquement.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de NashL'hypothèse de
rationalitéQu'est-ce que la
rationalité ?Une expérience
socio-économiqueEst-il rationnel d'être
irrationnel ?Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Bach ou Stravinski

Un couple (A et B, rebonjour) veut aller à un concert.
Il y a deux choix ce soir-là : Bach ou Stravinski ?

		B	
		Bach	Stravinski
A	Bach	1 \ 2	0 \ 0
	Stravinski	0 \ 0	2 \ 1

C'est un jeu coopératif.

Ce jeu n'est pas strictement compétitif : pour chacun il vaut mieux d'arriver à un accord, il préfère aller ensemble plutôt qu'aller seul.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Bach ou Stravinski

Un couple (A et B, rebonjour) veut aller à un concert.
Il y a deux choix ce soir-là : Bach ou Stravinski ?

		B	
		Bach	Stravinski
A	Bach	1 \ 2	0 \ 0
	Stravinski	0 \ 0	2 \ 1

C'est un jeu coopératif.

Ce jeu n'est pas strictement compétitif : pour chacun il vaut mieux d'arriver à un accord, il préfère aller ensemble plutôt qu'aller seul.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Le dilemme du prisonnier

Deux complices attendent leurs procès dans deux cellules séparées.
Le procureur propose à chacun de dénoncer l'autre.

		B	
		se taire	dénoncer
A	se taire	-3 / -3	-1 / -20
	dénoncer	-1 / -20	-15 / -15

Ce jeu n'est pas strictement compétitif.

Mais il n'incite pas non plus à la coopération.
C'est justement l'objectif du procureur ...

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Le dilemme du prisonnier

Deux complices attendent leurs procès dans deux cellules séparées.
Le procureur propose à chacun de dénoncer l'autre.

		B	
		se taire	dénoncer
A	se taire	-3 / -3	-1 / -20
	dénoncer	-1 / -20	-15 / -15

Ce jeu n'est pas strictement compétitif.

Mais il n'incite pas non plus à la coopération.
C'est justement l'objectif du procureur ...

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- 1 Qu'est-ce qu'un jeu ?
 - Aspects formels
 - Formalisation mathématique
 - Exemples classiques
- 2 Le théorème de Nash
 - Qu'est-ce qu'un équilibre ?
 - Stratégies mixtes
 - Le théorème de Nash
- 3 L'hypothèse de rationalité
 - Qu'est-ce que la rationalité ?
 - Une expérience socio-économique
 - Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Définition (jeu sous forme stratégique = forme normale)

Un **jeu** est une fonction $g: S_1 \times \cdots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Ici $J = \{1, \dots, m\}$ est l'ensemble des joueurs.
- S_j est l'ensemble des stratégies disponibles au joueur j .
- Chaque joueur $j \in J$ choisit sa stratégie $s_j \in S_j$ librement.
- Le gain du joueur j est $g_j(s_1, \dots, s_m)$, qu'il essaie d'optimiser.
En général g_j représente la *fonction d'utilité* pour le joueur j .
- Évidemment le joueur j ne contrôle que le paramètre s_j et non les stratégies $s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_m$ des autres.

Limitations de ce modèle

Cette définition ne tient pas encore compte des aspects temporels, ni de facteurs aléatoires, ni d'une éventuelle asymétrie d'information.

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Définition (jeu sous forme stratégique = forme normale)

Un **jeu** est une fonction $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Ici $J = \{1, \dots, m\}$ est l'ensemble des joueurs.
- S_j est l'ensemble des stratégies disponibles au joueur j .
- Chaque joueur $j \in J$ choisit sa stratégie $s_j \in S_j$ librement.
- Le gain du joueur j est $g_j(s_1, \dots, s_m)$, qu'il essaie d'optimiser. En général g_j représente la *fonction d'utilité* pour le joueur j .
- Évidemment le joueur j ne contrôle que le paramètre s_j et non les stratégies $s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_m$ des autres.

Limitations de ce modèle

Cette définition ne tient pas encore compte des aspects temporels, ni de facteurs aléatoires, ni d'une éventuelle asymétrie d'information.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Définition (jeu sous forme stratégique = forme normale)

Un **jeu** est une fonction $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Ici $J = \{1, \dots, m\}$ est l'ensemble des joueurs.
- S_j est l'ensemble des stratégies disponibles au joueur j .
- Chaque joueur $j \in J$ choisit sa stratégie $s_j \in S_j$ librement.
- Le gain du joueur j est $g_j(s_1, \dots, s_m)$, qu'il essaie d'optimiser. En général g_j représente la *fonction d'utilité* pour le joueur j .
- Évidemment le joueur j ne contrôle que le paramètre s_j et non les stratégies $s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_m$ des autres.

Limitations de ce modèle

Cette définition ne tient pas encore compte des aspects temporels, ni de facteurs aléatoires, ni d'une éventuelle asymétrie d'information.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Équilibre de Nash : qu'est-ce que c'est ?

Informellement, les stratégies (s_1, \dots, s_m) sont en équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain en changeant sa stratégie.

Définition (équilibre de Nash)

Soit $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un jeu. Un point (s_1, \dots, s_m) dans $S_1 \times \dots \times S_m$ est un **équilibre** si pour tout j et tout $x \in S_j$ on a $g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, x, s_{j+1}, \dots, s_m) \leq g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_m)$.

- C'est la notion fondamentale et organisatrice de la théorie, introduite par John Nash en 1950, prix Nobel d'économie 1994.
- Il existe des raffinements pour les jeux avec structure supplémentaire (temporelle, aléatoire, informationnelle, etc).

Équilibre de Nash : qu'est-ce que c'est ?

Informellement, les stratégies (s_1, \dots, s_m) sont en équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain en changeant sa stratégie.

Définition (équilibre de Nash)

Soit $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un jeu. Un point (s_1, \dots, s_m) dans $S_1 \times \dots \times S_m$ est un **équilibre** si pour tout j et tout $x \in S_j$ on a $g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, x, s_{j+1}, \dots, s_m) \leq g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_m)$.

- C'est la notion fondamentale et organisatrice de la théorie, introduite par John Nash en 1950, prix Nobel d'économie 1994.
- Il existe des raffinements pour les jeux avec structure supplémentaire (temporelle, aléatoire, informationnelle, etc).

Équilibre de Nash : qu'est-ce que c'est ?

Informellement, les stratégies (s_1, \dots, s_m) sont en équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain en changeant sa stratégie.

Définition (équilibre de Nash)

Soit $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un jeu. Un point (s_1, \dots, s_m) dans $S_1 \times \dots \times S_m$ est un **équilibre** si pour tout j et tout $x \in S_j$ on a $g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, x, s_{j+1}, \dots, s_m) \leq g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_m)$.

- C'est la notion fondamentale et organisatrice de la théorie, introduite par John Nash en 1950, prix Nobel d'économie 1994.
- Il existe des raffinements pour les jeux avec structure supplémentaire (temporelle, aléatoire, informationnelle, etc).

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.

Reformulation pour deux joueurs

Une paire de stratégies $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre ssi

$$g_1(s_1, s_2) = \max g_1(\bullet, s_2) \quad \text{et} \quad g_2(s_1, s_2) = \max g_2(s_1, \bullet).$$

- s_1 est une meilleure réponse à s_2 (par rapport à g_1),
 s_2 est une meilleure réponse à s_1 (par rapport à g_2).
- Cette notion précise ce qui est un « équilibre de forces »,
ou une « situation stable », ou encore un « point fixe ».
- Ceci ne veut pas dire qu'un équilibre soit désirable :
il se peut qu'un équilibre soit le pire des cas !

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.

Reformulation pour deux joueurs

Une paire de stratégies $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre ssi

$$g_1(s_1, s_2) = \max g_1(\bullet, s_2) \quad \text{et} \quad g_2(s_1, s_2) = \max g_2(s_1, \bullet).$$

- s_1 est une meilleure réponse à s_2 (par rapport à g_1),
 s_2 est une meilleure réponse à s_1 (par rapport à g_2).
- Cette notion précise ce qui est un « équilibre de forces »,
ou une « situation stable », ou encore un « point fixe ».
- Ceci ne veut pas dire qu'un équilibre soit désirable :
il se peut qu'un équilibre soit le pire des cas !

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.

Reformulation pour deux joueurs

Une paire de stratégies $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre ssi

$$g_1(s_1, s_2) = \max g_1(\bullet, s_2) \quad \text{et} \quad g_2(s_1, s_2) = \max g_2(s_1, \bullet).$$

- s_1 est une meilleure réponse à s_2 (par rapport à g_1),
 s_2 est une meilleure réponse à s_1 (par rapport à g_2).
- Cette notion précise ce qui est un « équilibre de forces »,
ou une « situation stable », ou encore un « point fixe ».
- Ceci ne veut pas dire qu'un équilibre soit désirable :
il se peut qu'un équilibre soit le pire des cas !

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.

Reformulation pour deux joueurs

Une paire de stratégies $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre ssi

$$g_1(s_1, s_2) = \max g_1(\bullet, s_2) \quad \text{et} \quad g_2(s_1, s_2) = \max g_2(s_1, \bullet).$$

- s_1 est une meilleure réponse à s_2 (par rapport à g_1),
 s_2 est une meilleure réponse à s_1 (par rapport à g_2).
- Cette notion précise ce qui est un « équilibre de forces »,
ou une « situation stable », ou encore un « point fixe ».
- Ceci ne veut pas dire qu'un équilibre soit désirable :
il se peut qu'un équilibre soit le pire des cas !

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Exemple (1/3) : un seul équilibre

Le dilemme du prisonnier

Ce jeu admet un unique point d'équilibre : (dénoncer,dénoncer).

		B	
		se taire	dénoncer
A	se taire	-3 / -3	-20 / -1
	dénoncer	-1 / -20	-15 / -15

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Exemple (2/3) : deux équilibres

Bach ou Stravinski

Ce jeu admet deux équilibres : (Bach,Bach) ou (Stravinski,Stravinski).

		B	
		Bach	Stravinski
A	Bach	1 \ 2	0 \ 0
	Stravinski	0 \ 0	2 \ 1

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Exemple (3/3) : aucun équilibre

Pierre-papier-ciseaux

Ce jeu n'admet aucun équilibre.

A \ B	pierre	papier	ciseaux
pierre	0 / 0	-1 / +1	+1 / -1
papier	+1 / -1	0 / 0	-1 / +1
ciseaux	-1 / +1	+1 / -1	0 / 0

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Version continue de « rester ou partir »

$$S_A = S_B = [-1, 2] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad g_A(x, y) = g_B(x, y) = xy$$

Ce jeu admet trois équilibres : $(-1, -1)$ et $(0, 0)$ puis $(2, 2)$.

À noter que seul $g(2, 2) = (4, 4)$ réalise le maximum global.

Version continue du dilemme du prisonnier

$$S_A = S_B = [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_A(x, y) = 10 + 10x - 20y \\ g_B(x, y) = 10 - 20x + 10y \end{cases}$$

Seul le point $(1, 1)$ est un équilibre.

À noter que $g(1, 1) = (0, 0)$ est inférieur à $g(0, 0) = (10, 10)$.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Version continue de « rester ou partir »

$$S_A = S_B = [-1, 2] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad g_A(x, y) = g_B(x, y) = xy$$

Ce jeu admet trois équilibres : $(-1, -1)$ et $(0, 0)$ puis $(2, 2)$.

À noter que seul $g(2, 2) = (4, 4)$ réalise le maximum global.

Version continue du dilemme du prisonnier

$$S_A = S_B = [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_A(x, y) = 10 + 10x - 20y \\ g_B(x, y) = 10 - 20x + 10y \end{cases}$$

Seul le point $(1, 1)$ est un équilibre.

À noter que $g(1, 1) = (0, 0)$ est inférieur à $g(0, 0) = (10, 10)$.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies mixtes : qu'est-ce que c'est ?

Regardons un jeu discret où S_j est un ensemble fini.
Pour emphase on appelle $s \in S_j$ une **stratégie pure**.

Définition

Une **stratégie mixte** est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_j des stratégies pures. On note \bar{S}_j l'ensemble des stratégies mixtes.

Puisque $S_j = \{s^0, \dots, s^n\}$ est supposé fini, ceci revient à considérer les combinaisons convexes $\bar{s} = \sum_i p_i s^i$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

Définition

Tout jeu $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ s'étend en $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ par interpolation linéaire : $\bar{g}(\dots, \sum_i p_i s^i, \dots) := \sum_i p_i g(\dots, s^i, \dots)$.

Interprétation probabiliste

Le joueur j choisit la stratégie $s^i \in S_j$ avec probabilité $p_i \in [0, 1]$.
Alors $\bar{g}(\bar{s})$ est l'espérance du gain, moyenné sur la stratégie mixte \bar{s} .

► sauter la discussion ?

Stratégies mixtes : qu'est-ce que c'est ?

Regardons un jeu discret où S_j est un ensemble fini.
Pour emphase on appelle $s \in S_j$ une **stratégie pure**.

Définition

Une **stratégie mixte** est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_j des stratégies pures. On note \bar{S}_j l'ensemble des stratégies mixtes.

Puisque $S_j = \{s^0, \dots, s^n\}$ est supposé fini, ceci revient à considérer les combinaisons convexes $\bar{s} = \sum_i p_i s^i$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

Définition

Tout jeu $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ s'étend en $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ par interpolation linéaire : $\bar{g}(\dots, \sum_i p_i s^i, \dots) := \sum_i p_i g(\dots, s^i, \dots)$.

Interprétation probabiliste

Le joueur j choisit la stratégie $s^i \in S_j$ avec probabilité $p_i \in [0, 1]$.
Alors $\bar{g}(\bar{s})$ est l'espérance du gain, moyenné sur la stratégie mixte \bar{s} .

► sauter la discussion ?

Stratégies mixtes : qu'est-ce que c'est ?

Regardons un jeu discret où S_j est un ensemble fini.
Pour emphase on appelle $s \in S_j$ une **stratégie pure**.

Définition

Une **stratégie mixte** est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_j des stratégies pures. On note \bar{S}_j l'ensemble des stratégies mixtes.

Puisque $S_j = \{s^0, \dots, s^n\}$ est supposé fini, ceci revient à considérer les combinaisons convexes $\bar{s} = \sum_i p_i s^i$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

Définition

Tout jeu $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ s'étend en $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ par interpolation linéaire : $\bar{g}(\dots, \sum_i p_i s^i, \dots) := \sum_i p_i g(\dots, s^i, \dots)$.

Interprétation probabiliste

Le joueur j choisit la stratégie $s^i \in S_j$ avec probabilité $p_i \in [0, 1]$.
Alors $\bar{g}(\bar{s})$ est l'espérance du gain, moyenné sur la stratégie mixte \bar{s} .

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies mixtes : qu'est-ce que c'est ?

Regardons un jeu discret où S_j est un ensemble fini.
Pour emphase on appelle $s \in S_j$ une **stratégie pure**.

Définition

Une **stratégie mixte** est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_j des stratégies pures. On note \bar{S}_j l'ensemble des stratégies mixtes.

Puisque $S_j = \{s^0, \dots, s^n\}$ est supposé fini, ceci revient à considérer les combinaisons convexes $\bar{s} = \sum_i p_i s^i$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

Définition

Tout jeu $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ s'étend en $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ par interpolation linéaire : $\bar{g}(\dots, \sum_i p_i s^i, \dots) := \sum_i p_i g(\dots, s^i, \dots)$.

Interprétation probabiliste

Le joueur j choisit la stratégie $s^i \in S_j$ avec probabilité $p_i \in [0, 1]$.
Alors $\bar{g}(\bar{s})$ est l'espérance du gain, moyenné sur la stratégie mixte \bar{s} .

► sauter la discussion ?

Stratégies mixtes : à quoi ça sert ?

- On a l'inclusion naturelle $S \subset \bar{S}$ définie par $s \mapsto 1s$.
- Tout joueur peut randomiser sa stratégie s'il le souhaite.
- Chacun est content d'élargir ses stratégies.

Le joueur j est-il vraiment content ? Les autres aussi élargissent leurs ensembles de stratégies. N'est-ce pas un inconvénient pour j ?

Observation

Si (s_1, \dots, s_m) est un équilibre du jeu initial $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ alors c'est encore un équilibre du jeu étendu $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

L'extension ne déstabilise pas les équilibres déjà existants.

Démonstration.

Pour tout $s_j^i \in S_j$ on a $g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$ donc $\bar{g}_j(\dots, \sum_i p_i s_j^i, \dots) = \sum_i p_i g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$. \square

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies mixtes : à quoi ça sert ?

- On a l'inclusion naturelle $S \subset \bar{S}$ définie par $s \mapsto 1s$.
- Tout joueur peut randomiser sa stratégie s'il le souhaite.
- Chacun est content d'élargir ses stratégies.

Le joueur j est-il vraiment content ? Les autres aussi élargissent leurs ensembles de stratégies. N'est-ce pas un inconvénient pour j ?

Observation

Si (s_1, \dots, s_m) est un équilibre du jeu initial $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ alors c'est encore un équilibre du jeu étendu $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

L'extension ne déstabilise pas les équilibres déjà existants.

Démonstration.

Pour tout $s_j^i \in S_j$ on a $g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$ donc $\bar{g}_j(\dots, \sum_i p_i s_j^i, \dots) = \sum_i p_i g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$. □

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies mixtes : à quoi ça sert ?

- On a l'inclusion naturelle $S \subset \bar{S}$ définie par $s \mapsto 1s$.
- Tout joueur peut randomiser sa stratégie s'il le souhaite.
- Chacun est content d'élargir ses stratégies.

Le joueur j est-il vraiment content ? Les autres aussi élargissent leurs ensembles de stratégies. N'est-ce pas un inconvénient pour j ?

Observation

Si (s_1, \dots, s_m) est un équilibre du jeu initial $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ alors c'est encore un équilibre du jeu étendu $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

L'extension ne déstabilise pas les équilibres déjà existants.

Démonstration.

Pour tout $s_j^i \in S_j$ on a $g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$ donc $\bar{g}_j(\dots, \sum_i p_i s_j^i, \dots) = \sum_i p_i g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$. □

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies mixtes : à quoi ça sert ?

- On a l'inclusion naturelle $S \subset \bar{S}$ définie par $s \mapsto 1s$.
- Tout joueur peut randomiser sa stratégie s'il le souhaite.
- Chacun est content d'élargir ses stratégies.

Le joueur j est-il vraiment content ? Les autres aussi élargissent leurs ensembles de stratégies. N'est-ce pas un inconvénient pour j ?

Observation

Si (s_1, \dots, s_m) est un équilibre du jeu initial $g: S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ alors c'est encore un équilibre du jeu étendu $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

L'extension ne déstabilise pas les équilibres déjà existants.

Démonstration.

Pour tout $s_j^i \in S_j$ on a $g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$ donc $\bar{g}_j(\dots, \sum_i p_i s_j^i, \dots) = \sum_i p_i g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$. \square

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.
Problème : certains jeux n'admettent aucun point d'équilibre.

Exemple

- ✗ Le jeu « pierre-papier-ciseaux » n'admet aucun équilibre dans les stratégies pures. C'est un défaut grave.
- ✓ Il admet un (unique) équilibre dans les stratégies mixtes : (\bar{s}_A, \bar{s}_B) avec $\bar{s}_A = \bar{s}_B = \frac{1}{3}\text{pierre} + \frac{1}{3}\text{papier} + \frac{1}{3}\text{ciseaux}$.

Cet exemple simpliste illustre un résultat fondamental :

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Soit $g: S_1 \times \cdots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un jeu discret avec S_1, \dots, S_m finis, et soit $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son extension aux stratégies mixtes.

Alors le jeu \bar{g} admet (au moins) un point d'équilibre.

► sauter la preuve ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.
Problème : certains jeux n'admettent aucun point d'équilibre.

Exemple

- ✗ Le jeu « pierre-papier-ciseaux » n'admet aucun équilibre dans les stratégies pures. C'est un défaut grave.
- ✓ Il admet un (unique) équilibre dans les stratégies mixtes : (\bar{s}_A, \bar{s}_B) avec $\bar{s}_A = \bar{s}_B = \frac{1}{3}\text{pierre} + \frac{1}{3}\text{papier} + \frac{1}{3}\text{ciseaux}$.

Cet exemple simpliste illustre un résultat fondamental :

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Soit $g: S_1 \times \cdots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un jeu discret avec S_1, \dots, S_m finis, et soit $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son extension aux stratégies mixtes.

Alors le jeu \bar{g} admet (au moins) un point d'équilibre.

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.
Problème : certains jeux n'admettent aucun point d'équilibre.

Exemple

- ✗ Le jeu « pierre-papier-ciseaux » n'admet aucun équilibre dans les stratégies pures. C'est un défaut grave.
- ✓ Il admet un (unique) équilibre dans les stratégies mixtes : (\bar{s}_A, \bar{s}_B) avec $\bar{s}_A = \bar{s}_B = \frac{1}{3}\text{pierre} + \frac{1}{3}\text{papier} + \frac{1}{3}\text{ciseaux}$.

Cet exemple simpliste illustre un résultat fondamental :

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Soit $g: S_1 \times \cdots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un jeu discret avec S_1, \dots, S_m finis, et soit $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son extension aux stratégies mixtes.

Alors le jeu \bar{g} admet (au moins) un point d'équilibre.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Proposition

Tout convexe compact $X \subset \mathbb{R}^n$ à intérieur non vide est homéomorphe à la boule fermée $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. \square

Pour $S = \{s^0, \dots, s^n\}$ l'ensemble \bar{S} satisfait aux hypothèses, donc $\bar{S} \cong D^n$. De même pour le produit $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \cong D^{n_1 + \dots + n_m}$.

Théorème (de point fixe, Brouwer 1909)

Toute application continue $f: D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in D^n$ tel que $f(x) = x$. \square

Idée de la démonstration :

- En dimension $n = 1$ on a $D^1 = [-1, +1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires suffit. (Exercice, niveau L1-L2)
- Cas général : lemme de Sperner (triangulations, niveau L2-L3) ou un argument de volume (analyse & intégration, niveau L3-M1) ou par la topologie algébrique (homologie, niveau M1-M2)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Proposition

Tout convexe compact $X \subset \mathbb{R}^n$ à intérieur non vide est homéomorphe à la boule fermée $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. \square

Pour $S = \{s^0, \dots, s^n\}$ l'ensemble \bar{S} satisfait aux hypothèses, donc $\bar{S} \cong D^n$. De même pour le produit $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \cong D^{n_1 + \dots + n_m}$.

Théorème (de point fixe, Brouwer 1909)

Toute application continue $f: D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in D^n$ tel que $f(x) = x$. \square

Idée de la démonstration :

- En dimension $n = 1$ on a $D^1 = [-1, +1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires suffit. (Exercice, niveau L1-L2)
- Cas général : lemme de Sperner (triangulations, niveau L2-L3) ou un argument de volume (analyse & intégration, niveau L3-M1) ou par la topologie algébrique (homologie, niveau M1-M2)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Proposition

Tout convexe compact $X \subset \mathbb{R}^n$ à intérieur non vide est homéomorphe à la boule fermée $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. \square

Pour $S = \{s^0, \dots, s^n\}$ l'ensemble \bar{S} satisfait aux hypothèses, donc $\bar{S} \cong D^n$. De même pour le produit $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \cong D^{n_1 + \dots + n_m}$.

Théorème (de point fixe, Brouwer 1909)

Toute application continue $f: D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in D^n$ tel que $f(x) = x$. \square

Idée de la démonstration :

- En dimension $n = 1$ on a $D^1 = [-1, +1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires suffit. (Exercice, niveau L1-L2)
- Cas général : lemme de Sperner (triangulations, niveau L2-L3) ou un argument de volume (analyse & intégration, niveau L3-M1) ou par la topologie algébrique (homologie, niveau M1-M2)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Proposition

Tout convexe compact $X \subset \mathbb{R}^n$ à intérieur non vide est homéomorphe à la boule fermée $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. \square

Pour $S = \{s^0, \dots, s^n\}$ l'ensemble \bar{S} satisfait aux hypothèses, donc $\bar{S} \cong D^n$. De même pour le produit $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \cong D^{n_1 + \dots + n_m}$.

Théorème (de point fixe, Brouwer 1909)

Toute application continue $f: D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in D^n$ tel que $f(x) = x$. \square

Idée de la démonstration :

- En dimension $n = 1$ on a $D^1 = [-1, +1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires suffit. (Exercice, niveau L1-L2)
- Cas général : lemme de Sperner (triangulations, niveau L2-L3) ou un argument de volume (analyse & intégration, niveau L3-M1) ou par la topologie algébrique (homologie, niveau M1-M2)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Le jeu étendu $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet un point d'équilibre.

Démonstration.

- 1 On fixe $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m$ puis on définit $\bar{g}_j^*: \bar{S}_j \rightarrow \mathbb{R}$ par $\bar{g}_j^*(x) := \bar{g}_j(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{j-1}, x, \bar{s}_{j+1}, \dots, \bar{s}_m)$.
- 2 On définit $\delta_i: \bar{S}_j \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\delta_i(\bar{s}_j) := \begin{cases} \bar{g}_j^*(s_j^i) - \bar{g}_j^*(\bar{s}_j) & \text{si positif,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 3 Pour $\bar{s}_j = \sum_i p_i s_j^i$ on définit $\bar{s}'_j := \sum_i p'_i s_j^i$ par $p'_i := \frac{p_i + \delta_i(\bar{s}_j)}{1 + \sum_k \delta_k(\bar{s}_j)}$.
On voit que $p'_i \geq 0$ et $\sum_i p'_i = 1$, donc $\bar{s}'_j \in \bar{S}_j$.
- 4 L'application $f: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m$ donnée par $f(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m) = (\bar{s}'_1, \dots, \bar{s}'_m)$ est continue.
- 5 On a $f(\bar{s}) = \bar{s}$ si et seulement si \bar{s} est un équilibre de Nash :
(Preuve de " \Rightarrow ") Pour $\bar{s}_j = \sum_i p_i s_j^i$ on a $\bar{g}_j^*(\bar{s}_j) = \sum_i p_i \bar{g}_j^*(s_j^i)$.
Il existe donc i tel que $\bar{g}_j^*(s_j^i) \leq \bar{g}_j^*(\bar{s}_j)$ et ainsi $\delta_i(\bar{s}_j) = 0$.
Puisque $p'_i = p_i$ on voit que $\delta_k(\bar{s}_j) = 0$ pour tout k .

On conclut en faisant appel au théorème de Brouwer. \square

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Le jeu étendu $\bar{g}: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet un point d'équilibre.

Démonstration.

- 1 On fixe $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m$ puis on définit $\bar{g}_j^*: \bar{S}_j \rightarrow \mathbb{R}$ par $\bar{g}_j^*(x) := \bar{g}_j(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{j-1}, x, \bar{s}_{j+1}, \dots, \bar{s}_m)$.
- 2 On définit $\delta_i: \bar{S}_j \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\delta_i(\bar{s}_j) := \begin{cases} \bar{g}_j^*(s_j^i) - \bar{g}_j^*(\bar{s}_j) & \text{si positif,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 3 Pour $\bar{s}_j = \sum_i p_i s_j^i$ on définit $\bar{s}'_j := \sum_i p'_i s_j^i$ par $p'_i := \frac{p_i + \delta_i(\bar{s}_j)}{1 + \sum_k \delta_k(\bar{s}_j)}$.
On voit que $p'_i \geq 0$ et $\sum_i p'_i = 1$, donc $\bar{s}'_j \in \bar{S}_j$.
- 4 L'application $f: \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m \rightarrow \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_m$ donnée par $f(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m) = (\bar{s}'_1, \dots, \bar{s}'_m)$ est continue.
- 5 On a $f(\bar{s}) = \bar{s}$ si et seulement si \bar{s} est un équilibre de Nash :
(Preuve de " \Rightarrow ") Pour $\bar{s}_j = \sum_i p_i s_j^i$ on a $\bar{g}_j^*(\bar{s}_j) = \sum_i p_i \bar{g}_j^*(s_j^i)$.
Il existe donc i tel que $\bar{g}_j^*(s_j^i) \leq \bar{g}_j^*(\bar{s}_j)$ et ainsi $\delta_i(\bar{s}_j) = 0$.
Puisque $p'_i = p_i$ on voit que $\delta_k(\bar{s}_j) = 0$ pour tout k .

On conclut en faisant appel au théorème de Brouwer. □

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

- 1 Qu'est-ce qu'un jeu ?
 - Aspects formels
 - Formalisation mathématique
 - Exemples classiques
- 2 Le théorème de Nash
 - Qu'est-ce qu'un équilibre ?
 - Stratégies mixtes
 - Le théorème de Nash
- 3 L'hypothèse de rationalité
 - Qu'est-ce que la rationalité ?
 - Une expérience socio-économique
 - Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Prélude

- À quoi sert la théorie ?
- Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

- Aspects formels
- Formalisation mathématique
- Exemples classiques

Le théorème de Nash

- Qu'est-ce qu'un équilibre ?
- Stratégies mixtes
- Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

- Qu'est-ce que la rationalité ?
- Une expérience socio-économique
- Est-il rationnel d'être irrationnel ?
- Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

- Résumé
- Perspectives
- Références

Relations commerciales

Deux commerçants profitent mutuellement s'ils coopèrent. Ce jeu se répète jour par jour ; seule la triche termine leur relation commerciale.

		B	
		coopérer	tricher
A	coopérer	1 / 1	10 / -10
	tricher	10 / -10	0 / 0

Inflation : les gains subissent un décompte $\delta \in]0, 1[$, disons $\delta = 0.95$.

\Rightarrow Le gain d'une coopération à long terme est $\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k = \frac{1}{1-\delta} = 20$.

\Rightarrow A priori il est plus profitable de coopérer que de trahir.

Que va se passer ? Où intervient l'hypothèse de rationalité ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Relations commerciales

Deux commerçants profitent mutuellement s'ils coopèrent. Ce jeu se répète jour par jour ; seule la triche termine leur relation commerciale.

		B	
		coopérer	tricher
A	coopérer	1 / 1	10 / -10
	tricher	10 / -10	0 / 0

Inflation : les gains subissent un décompte $\delta \in]0, 1[$, disons $\delta = 0.95$.

⇒ Le gain d'une coopération à long terme est $\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k = \frac{1}{1-\delta} = 20$.

⇒ A priori il est plus profitable de coopérer que de trahir.

Que va se passer ? Où intervient l'hypothèse de rationalité ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Observation

L'hypothèse de rationalité est omniprésente dans la théorie des jeux : sans elle mêmes les problèmes simples restent insolubles.

Explicitons donc cette hypothèse souvent tacite :

- 0 Chaque acteur maximise son gain (sa fonction d'utilité).
- 1 Chaque acteur connaît parfaitement les règles et il est capable d'en déduire toutes les conséquences.
- 2 Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) et (1).
- 3 Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) à (2). Et ainsi de suite. . .

Limitations de la rationalité

Si l'hypothèse (0) semble acceptable, l'hypothèse (1) est souvent un approximation grossière. C'est un peu plus réaliste pour des groupes, entreprises, nations, . . . qui ont les ressources nécessaires.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Observation

L'hypothèse de rationalité est omniprésente dans la théorie des jeux : sans elle mêmes les problèmes simples restent insolubles.

Explicitons donc cette hypothèse souvent tacite :

- 0 Chaque acteur maximise son gain (sa fonction d'utilité).
- 1 Chaque acteur connaît parfaitement les règles et il est capable d'en déduire toutes les conséquences.
- 2 Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) et (1).
- 3 Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) à (2). Et ainsi de suite. . .

Limitations de la rationalité

Si l'hypothèse (0) semble acceptable, l'hypothèse (1) est souvent un approximation grossière. C'est un peu plus réaliste pour des groupes, entreprises, nations, . . . qui ont les ressources nécessaires.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Observation

L'hypothèse de rationalité est omniprésente dans la théorie des jeux : sans elle mêmes les problèmes simples restent insolubles.

Explicitons donc cette hypothèse souvent tacite :

- 0 Chaque acteur maximise son gain (sa fonction d'utilité).
- 1 Chaque acteur connaît parfaitement les règles et il est capable d'en déduire toutes les conséquences.
- 2 Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) et (1).
- 3 Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) à (2). Et ainsi de suite. . .

Limitations de la rationalité

Si l'hypothèse (0) semble acceptable, l'hypothèse (1) est souvent un approximation grossière. C'est un peu plus réaliste pour des groupes, entreprises, nations, . . . qui ont les ressources nécessaires.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Début du jeu. — A reçoit 10€ de la part du maître du jeu, tandis que B reçoit 0€. Leurs comptes sont alors initialisés comme suit :

A : 10€	B : 0€
---------	--------

Premier tour. — A choisit une somme s qu'il veut envoyer à B, bien sûr dans les limites $0€ \leq s \leq 10€$. La somme s est déduite du compte A, et le maître du jeu ajoute **le triple** de la somme au compte B :

A : $10€ - s$	B : $0€ + 3s$
---------------	---------------

Second tour. — À son tour B choisit une somme t qu'il veut renvoyer à A, bien sûr dans les limites $0€ \leq t \leq 3s$. La somme t est déduite du compte B et ajoutée au compte A. Ainsi s'achève le jeu :

A : $10€ - s + t$	B : $0€ + 3s - t$
-------------------	-------------------

Question théorique : Quelle est le comportement rationnel ?

Question empirique : Quelle est le comportement observé ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalitéQu'est-ce que la
rationalité ?**Une expérience
socio-économique**Est-il rationnel d'être
irrationnel ?Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Début du jeu. — A reçoit 10€ de la part du maître du jeu, tandis que B reçoit 0€. Leurs comptes sont alors initialisés comme suit :

A : 10€	B : 0€
---------	--------

Premier tour. — A choisit une somme s qu'il veut envoyer à B, bien sûr dans les limites $0€ \leq s \leq 10€$. La somme s est déduite du compte A, et le maître du jeu ajoute **le triple** de la somme au compte B :

A : $10€ - s$	B : $0€ + 3s$
---------------	---------------

Second tour. — À son tour B choisit une somme t qu'il veut renvoyer à A, bien sûr dans les limites $0€ \leq t \leq 3s$. La somme t est déduite du compte B et ajoutée au compte A. Ainsi s'achève le jeu :

A : $10€ - s + t$	B : $0€ + 3s - t$
-------------------	-------------------

Question théorique : Quelle est le comportement rationnel ?

Question empirique : Quelle est le comportement observé ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalitéQu'est-ce que la
rationalité ?**Une expérience
socio-économique**Est-il rationnel d'être
irrationnel ?Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Début du jeu. — A reçoit 10€ de la part du maître du jeu, tandis que B reçoit 0€. Leurs comptes sont alors initialisés comme suit :

A : 10€	B : 0€
---------	--------

Premier tour. — A choisit une somme s qu'il veut envoyer à B, bien sûr dans les limites $0€ \leq s \leq 10€$. La somme s est déduite du compte A, et le maître du jeu ajoute **le triple** de la somme au compte B :

A : $10€ - s$	B : $0€ + 3s$
---------------	---------------

Second tour. — À son tour B choisit une somme t qu'il veut renvoyer à A, bien sûr dans les limites $0€ \leq t \leq 3s$. La somme t est déduite du compte B et ajoutée au compte A. Ainsi s'achève le jeu :

A : $10€ - s + t$	B : $0€ + 3s - t$
-------------------	-------------------

Question théorique : Quelle est le comportement rationnel ?

Question empirique : Quelle est le comportement observé ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalitéQu'est-ce que la
rationalité ?**Une expérience
socio-économique**Est-il rationnel d'être
irrationnel ?Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Début du jeu. — A reçoit 10€ de la part du maître du jeu, tandis que B reçoit 0€. Leurs comptes sont alors initialisés comme suit :

A : 10€	B : 0€
---------	--------

Premier tour. — A choisit une somme s qu'il veut envoyer à B, bien sûr dans les limites $0€ \leq s \leq 10€$. La somme s est déduite du compte A, et le maître du jeu ajoute **le triple** de la somme au compte B :

A : $10€ - s$	B : $0€ + 3s$
---------------	---------------

Second tour. — À son tour B choisit une somme t qu'il veut renvoyer à A, bien sûr dans les limites $0€ \leq t \leq 3s$. La somme t est déduite du compte B et ajoutée au compte A. Ainsi s'achève le jeu :

A : $10€ - s + t$	B : $0€ + 3s - t$
-------------------	-------------------

Question théorique : Quelle est le comportement rationnel ?

Question empirique : Quelle est le comportement observé ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalitéQu'est-ce que la
rationalité ?**Une expérience
socio-économique**Est-il rationnel d'être
irrationnel ?Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Proposition

Dans notre jeu « prêt et remboursement » le seul équilibre est $(0, 0)$.

Démonstration.

Supposons que (s, t) est un point d'équilibre.

Si $t > 0$ alors B gagnerait plus avec $(s, 0)$. Donc $t = 0$.

Si $s > 0$ alors A gagnerait plus avec $(0, 0)$. Donc $s = 0$. □

Interprétation rationnelle

B essaie de maximiser son profit : il est rationnel de niveau 1.

A aussi maximise son profit, et il anticipe en plus que B fera pareil : il est rationnel de niveau 2. C'est le point essentiel du raisonnement.

- Sous l'hypothèse de rationalité, l'analyse est très simple. L'interprétation normative prône une unique stratégie rationnelle.
- Dans des expériences on observe un tout autre comportement. Plus étonnant encore : le comportement irrationnel rapporte plus ! Comment expliquer ce paradoxe ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Proposition

Dans notre jeu « prêt et remboursement » le seul équilibre est $(0, 0)$.

Démonstration.

Supposons que (s, t) est un point d'équilibre.

Si $t > 0$ alors B gagnerait plus avec $(s, 0)$. Donc $t = 0$.

Si $s > 0$ alors A gagnerait plus avec $(0, 0)$. Donc $s = 0$. □

Interprétation rationnelle

B essaie de maximiser son profit : il est rationnel de niveau 1.

A aussi maximise son profit, et il anticipe en plus que B fera pareil : il est rationnel de niveau 2. C'est le point essentiel du raisonnement.

- Sous l'hypothèse de rationalité, l'analyse est très simple. L'interprétation normative prône une unique stratégie rationnelle.
- Dans des expériences on observe un tout autre comportement. Plus étonnant encore : le comportement irrationnel rapporte plus ! Comment expliquer ce paradoxe ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Proposition

Dans notre jeu « prêt et remboursement » le seul équilibre est $(0, 0)$.

Démonstration.

Supposons que (s, t) est un point d'équilibre.

Si $t > 0$ alors B gagnerait plus avec $(s, 0)$. Donc $t = 0$.

Si $s > 0$ alors A gagnerait plus avec $(0, 0)$. Donc $s = 0$. □

Interprétation rationnelle

B essaie de maximiser son profit : il est rationnel de niveau 1.

A aussi maximise son profit, et il anticipe en plus que B fera pareil : il est rationnel de niveau 2. C'est le point essentiel du raisonnement.

- Sous l'hypothèse de rationalité, l'analyse est très simple. L'interprétation normative prône une unique stratégie rationnelle.
- Dans des expériences on observe un tout autre comportement. Plus étonnant encore : le comportement irrationnel rapporte plus ! Comment expliquer ce paradoxe ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

Proposition

Dans notre jeu « prêt et remboursement » le seul équilibre est $(0, 0)$.

Démonstration.

Supposons que (s, t) est un point d'équilibre.

Si $t > 0$ alors B gagnerait plus avec $(s, 0)$. Donc $t = 0$.

Si $s > 0$ alors A gagnerait plus avec $(0, 0)$. Donc $s = 0$. □

Interprétation rationnelle

B essaie de maximiser son profit : il est rationnel de niveau 1.

A aussi maximise son profit, et il anticipe en plus que B fera pareil : il est rationnel de niveau 2. C'est le point essentiel du raisonnement.

- Sous l'hypothèse de rationalité, l'analyse est très simple. L'interprétation normative prône une unique stratégie rationnelle.
- Dans des expériences on observe un tout autre comportement. Plus étonnant encore : le comportement irrationnel rapporte plus ! Comment expliquer ce paradoxe ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Proposition

Dans notre jeu « prêt et remboursement » le seul équilibre est $(0, 0)$.

Démonstration.

Supposons que (s, t) est un point d'équilibre.

Si $t > 0$ alors B gagnerait plus avec $(s, 0)$. Donc $t = 0$.

Si $s > 0$ alors A gagnerait plus avec $(0, 0)$. Donc $s = 0$. □

Interprétation rationnelle

B essaie de maximiser son profit : il est rationnel de niveau 1.

A aussi maximise son profit, et il anticipe en plus que B fera pareil : il est rationnel de niveau 2. C'est le point essentiel du raisonnement.

- Sous l'hypothèse de rationalité, l'analyse est très simple. L'interprétation normative prône une unique stratégie rationnelle.
- Dans des expériences on observe un tout autre comportement. Plus étonnant encore : le comportement irrationnel rapporte plus ! Comment expliquer ce paradoxe ?

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Approche empirique

L'économie expérimentale mène des expériences socio-économiques de petite échelle dans un environnement contrôlé (laboratoire).
L'objectif est de tester et de calibrer des prévisions théoriques.

Le mardi 06/11/2007 nous avons effectué l'expérience ci-dessus avec le groupe des magistères en L3 :

- 1 Chaque joueur entre sa stratégie sur ordinateur.
- 2 On fait jouer les stratégies les unes contre les autres.
- 3 Les résultats des jeux deux-à-deux sont moyennés.
- 4 On affiche le classement des stratégies selon leur gain.

La situation est à peu près réaliste :

- plutôt anonyme (bien que pas complètement)
- gains désirables (malheureusement non réels)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Approche empirique

L'économie expérimentale mène des expériences socio-économiques de petite échelle dans un environnement contrôlé (laboratoire).
L'objectif est de tester et de calibrer des prévisions théoriques.

Le mardi 06/11/2007 nous avons effectué l'expérience ci-dessus avec le groupe des magistères en L3 :

- 1 Chaque joueur entre sa stratégie sur ordinateur.
- 2 On fait jouer les stratégies les unes contre les autres.
- 3 Les résultats des jeux deux-à-deux sont moyennés.
- 4 On affiche le classement des stratégies selon leur gain.

La situation est à peu près réaliste :

- plutôt anonyme (bien que pas complètement)
- gains désirables (malheureusement non réels)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Approche empirique

L'économie expérimentale mène des expériences socio-économiques de petite échelle dans un environnement contrôlé (laboratoire).
L'objectif est de tester et de calibrer des prévisions théoriques.

Le mardi 06/11/2007 nous avons effectué l'expérience ci-dessus avec le groupe des magistères en L3 :

- 1 Chaque joueur entre sa stratégie sur ordinateur.
- 2 On fait jouer les stratégies les unes contre les autres.
- 3 Les résultats des jeux deux-à-deux sont moyennés.
- 4 On affiche le classement des stratégies selon leur gain.

La situation est à peu près réaliste :

- plutôt anonyme (bien que pas complètement)
- gains désirables (malheureusement non réels)

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies observées (premier tournoi)

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
#4	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
#1	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#2	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#3	11:05	11:05	10:06	10:06	10:06	10:06	08:08
#4	10:04	11:03	09:05	10:04	10:04	10:04	09:05
#5	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#6	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#7	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.71	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17.29	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
16.86	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
16.71	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
16.43	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies observées (premier tournoi)

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
#4	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
#1	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#2	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#3	11:05	11:05	10:06	10:06	10:06	10:06	08:08
#4	10:04	11:03	09:05	10:04	10:04	10:04	09:05
#5	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#6	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#7	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.71	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17.29	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
16.86	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
16.71	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
16.43	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies observées (premier tournoi)

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
#4	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
#1	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#2	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#3	11:05	11:05	10:06	10:06	10:06	10:06	08:08
#4	10:04	11:03	09:05	10:04	10:04	10:04	09:05
#5	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#6	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#7	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.71	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17.29	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
16.86	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
16.71	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
16.43	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies observées (second tournoi)

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
#4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
#8	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
#1	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05
#2	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#3	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#4	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#5	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#6	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#7	08:08	11:05	08:08	08:08	10:06	10:06	08:08	07:09
#8	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18.12	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3
17.75	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17.12	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
15.38	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12.88	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies observées (second tournoi)

Jeux et rationalité

M. Eisermann

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
#4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
#8	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
#1	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05
#2	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#3	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#4	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#5	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#6	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#7	08:08	11:05	08:08	08:08	10:06	10:06	08:08	07:09
#8	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18.12	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3
17.75	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17.12	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
15.38	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12.88	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

**Une expérience
socio-économique**

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Stratégies observées (second tournoi)

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
#4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
#8	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
#1	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05
#2	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#3	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#4	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#5	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#6	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#7	08:08	11:05	08:08	08:08	10:06	10:06	08:08	07:09
#8	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18.12	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3
17.75	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17.12	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
15.38	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12.88	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Prélude

À quoi sert la théorie ?

Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels

Formalisation

mathématique

Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?

Stratégies mixtes

Le théorème de Nash

L'hypothèse de

rationalité

Qu'est-ce que la

rationalité ?

Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être

irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être

rationnel ?

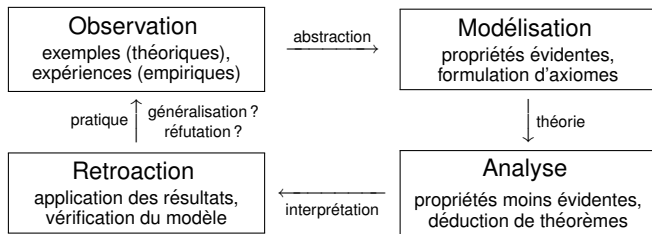
Conclusion

Résumé

Perspectives

Références

On a fait un premier tour complet :



Nous venons de découvrir des phénomènes empiriques qui ne sont pas expliqués par notre premier modèle. Celui-ci doit donc être raffiné : la quête continue ...

Rappelons les deux interprétations possibles :

- descriptive — décrit et explique le comportement observé.
- normative — prescrit et optimise le comportement à adopter.

▶ résumé

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?

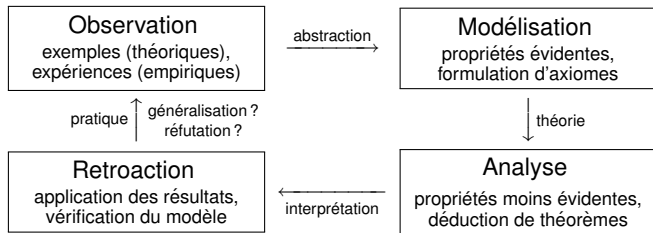
Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

On a fait un premier tour complet :



Nous venons de découvrir des phénomènes empiriques qui ne sont pas expliqués par notre premier modèle. Celui-ci doit donc être raffiné : la quête continue ...

Rappelons les deux interprétations possibles :

- descriptive — décrit et explique le comportement observé.
- normative — prescrit et optimise le comportement à adopter.

▶ résumé

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

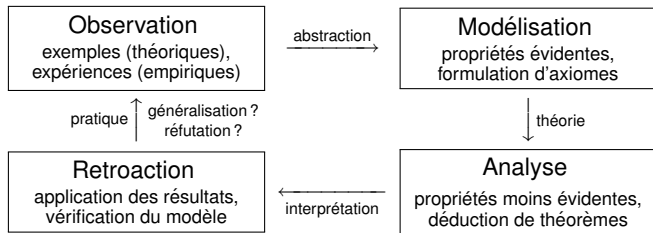
L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

On a fait un premier tour complet :



Nous venons de découvrir des phénomènes empiriques qui ne sont pas expliqués par notre premier modèle. Celui-ci doit donc être raffiné : la quête continue ...

Rappelons les deux interprétations possibles :

- descriptive — décrit et explique le comportement observé.
- normative — prescrit et optimise le comportement à adopter.

▸ résumé

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?

Une expérience
socio-économique

Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Un héritage à prendre ou à laisser

Un testament prévoit un million d'euros pour deux héritiers A et B. Le testament exige que l'aîné A propose, devant notaire, un partage $(1000000 - x, x)$ de son choix. Ensuite le cadet B doit se décider :

- S'il accepte, le partage est $(1000000 - x, x)$ comme proposé.
- S'il refuse, l'héritage est perdu et le gain est $(0, 0)$.

Questions

Quelle est la solution sous l'hypothèse de rationalité ?
Est-il avantageux d'être irrationnel ? Y a-t-il un paradoxe ?

Négociation

Les deux alternent infiniment, avec un décompte $\delta \in]0, 1[$ modélisant l'inflation. Que se passera-t-il ?

Cette question a inspiré le deuxième article célèbre de Nash, *The Bargaining Problem* (Econometrica, 1950).

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Un héritage à prendre ou à laisser

Un testament prévoit un million d'euros pour deux héritiers A et B. Le testament exige que l'aîné A propose, devant notaire, un partage $(1000000 - x, x)$ de son choix. Ensuite le cadet B doit se décider :

- S'il accepte, le partage est $(1000000 - x, x)$ comme proposé.
- S'il refuse, l'héritage est perdu et le gain est $(0, 0)$.

Questions

Quelle est la solution sous l'hypothèse de rationalité ?
Est-il avantageux d'être irrationnel ? Y a-t-il un paradoxe ?

Négociation

Les deux alternent infiniment, avec un décompte $\delta \in]0, 1[$ modélisant l'inflation. Que se passera-t-il ?

Cette question a inspiré le deuxième article célèbre de Nash, *The Bargaining Problem* (Econometrica, 1950).

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Un héritage à prendre ou à laisser

Un testament prévoit un million d'euros pour deux héritiers A et B. Le testament exige que l'aîné A propose, devant notaire, un partage $(1000000 - x, x)$ de son choix. Ensuite le cadet B doit se décider :

- S'il accepte, le partage est $(1000000 - x, x)$ comme proposé.
- S'il refuse, l'héritage est perdu et le gain est $(0, 0)$.

Questions

Quelle est la solution sous l'hypothèse de rationalité ?
Est-il avantageux d'être irrationnel ? Y a-t-il un paradoxe ?

Négociation

Les deux alternent infiniment, avec un décompte $\delta \in]0, 1[$ modélisant l'inflation. Que se passera-t-il ?

Cette question a inspiré le deuxième article célèbre de Nash, *The Bargaining Problem* (Econometrica, 1950).

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Développement durable

Un lac est rempli de poissons à sa capacité maximale de 1000t.
En dessous de ce seuil, le taux de régénération est de 10% par an.

Chacune des 20 familles riveraines consomme 1t par an.
Elle peut pêcher jusqu'à 10t, le surplus étant vendu.

Questions

Que serait une stratégie raisonnable ? individuelle ? collective ?
Quel est le rôle de l'éthique, ou de la législation ?

Adam Smith (1723–1790) : « L'égoïsme d'un individu seul est nuisible,
mais la confrontation des égoïsmes mène à l'intérêt général. »

Immanuel Kant (1724–1804) : « Agis selon la maxime qui peut en
même temps se transformer en loi universelle. »

Proverbe indien : « La Terre ne vous a pas été donnée par vos
parents, Elle vous a été prêtée par vos enfants. »

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
**Est-il irrationnel d'être
rationnel ?**

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Développement durable

Un lac est rempli de poissons à sa capacité maximale de 1000t.
En dessous de ce seuil, le taux de régénération est de 10% par an.

Chacune des 20 familles riveraines consomme 1t par an.
Elle peut pêcher jusqu'à 10t, le surplus étant vendu.

Questions

Que serait une stratégie raisonnable ? individuelle ? collective ?
Quel est le rôle de l'éthique, ou de la législation ?

Adam Smith (1723–1790) : « L'égoïsme d'un individu seul est nuisible,
mais la confrontation des égoïsmes mène à l'intérêt général. »

Immanuel Kant (1724–1804) : « Agis selon la maxime qui peut en
même temps se transformer en loi universelle. »

Proverbe indien : « La Terre ne vous a pas été donnée par vos
parents, Elle vous a été prêtée par vos enfants. »

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
**Est-il irrationnel d'être
rationnel ?**

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Développement durable

Un lac est rempli de poissons à sa capacité maximale de 1000t.
En dessous de ce seuil, le taux de régénération est de 10% par an.

Chacune des 20 familles riveraines consomme 1t par an.
Elle peut pêcher jusqu'à 10t, le surplus étant vendu.

Questions

Que serait une stratégie raisonnable ? individuelle ? collective ?
Quel est le rôle de l'éthique, ou de la législation ?

Adam Smith (1723–1790) : « L'égoïsme d'un individu seul est nuisible,
mais la confrontation des égoïsmes mène à l'intérêt général. »

Immanuel Kant (1724–1804) : « Agis selon la maxime qui peut en
même temps se transformer en loi universelle. »

Proverbe indien : « La Terre ne vous a pas été donnée par vos
parents, Elle vous a été prêtée par vos enfants. »

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
**Est-il irrationnel d'être
rationnel ?**

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- 1** La théorie des jeux est un langage universel pour décrire puis analyser des situations de conflit et de coopération.
- 2 La notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.
Le théorème de Nash établit l'existence de points d'équilibre.
- 3 L'hypothèse de rationalité est primordiale pour la déduction.
Sans cette hypothèse on n'arrive pas à raisonner.
- 4 En général, la réalité est plus complexe que l'on ne pense.
La prudence et la modestie s'imposent.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- 1** La théorie des jeux est un langage universel pour décrire puis analyser des situations de conflit et de coopération.
- 2** La notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu. Le théorème de Nash établit l'existence de points d'équilibre.
- 3** L'hypothèse de rationalité est primordiale pour la déduction. Sans cette hypothèse on n'arrive pas à raisonner.
- 4** En général, la réalité est plus complexe que l'on ne pense. La prudence et la modestie s'imposent.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- 1 La théorie des jeux est un langage universel pour décrire puis analyser des situations de conflit et de coopération.
- 2 La notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu. Le théorème de Nash établit l'existence de points d'équilibre.
- 3 L'hypothèse de rationalité est primordiale pour la déduction. Sans cette hypothèse on n'arrive pas à raisonner.
- 4 En général, la réalité est plus complexe que l'on ne pense. La prudence et la modestie s'imposent.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- 1 La théorie des jeux est un langage universel pour décrire puis analyser des situations de conflit et de coopération.
- 2 La notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu. Le théorème de Nash établit l'existence de points d'équilibre.
- 3 L'hypothèse de rationalité est primordiale pour la déduction. Sans cette hypothèse on n'arrive pas à raisonner.
- 4 En général, la réalité est plus complexe que l'on ne pense. La prudence et la modestie s'imposent.

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la rationalité ?
Une expérience socio-économique
Est-il rationnel d'être irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- Raffinement des outils
- Théorie des coalitions
- Rationalité limitée
- Design des mécanismes

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- Raffinement des outils
- Théorie des coalitions
- Rationalité limitée
- Design des mécanismes

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- Raffinement des outils
- Théorie des coalitions
- Rationalité limitée
- Design des mécanismes

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- Raffinement des outils
- Théorie des coalitions
- Rationalité limitée
- Design des mécanismes

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

- Ken Binmore : *Fun and Games*, Heath & Co, 1992.
- Duncan Luce, Howard Raiffa : *Games and decisions*, John Wiley & Sons, 1957 ; Dover reprint 1989.
- John Milnor : *A Nobel prize for John Nash*, Math. Intelligencer 17 (1995), 11-17.
- Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind : A Biography of John Forbes Nash, Jr.*, Simon & Schuster, 1998.
- Wikipédia : fr.wikipedia.org, voir *Théorie des jeux*, John von Neumann, Oskar Morgenstern, John Nash, Reinhard Selten
- Nobel prize, nobelprize.org, voir *Nobel prizes* puis *John Nash* et *Reinhard Selten* et d'autres encore...

Merci de votre attention !

Prélude

À quoi sert la théorie ?
Quelques protagonistes

Qu'est-ce qu'un jeu ?

Aspects formels
Formalisation
mathématique
Exemples classiques

Le théorème de Nash

Qu'est-ce qu'un équilibre ?
Stratégies mixtes
Le théorème de Nash

L'hypothèse de
rationalité

Qu'est-ce que la
rationalité ?
Une expérience
socio-économique
Est-il rationnel d'être
irrationnel ?
Est-il irrationnel d'être
rationnel ?

Conclusion

Résumé
Perspectives
Références

Design de mécanismes

Quelle est l'idée ?

Exemple : les enchères

Seconde expérience

Corsaires démocrates

- 4 Design de mécanismes
 - Quelle est l'idée ?
 - Exemple : les enchères
 - Seconde expérience
 - Corsaires démocrates

Parfois le « maître du jeu » peut fixer les règles. Par exemple :

- Le procureur dans le « dilemme du prisonnier »
- Une maison d'enchère fixe sa réglementation (ebay, par exemple)
- L'université fixe le cadre des études (prérequis, examens, ...)
- L'état fixe la législation (pénale, fiscale, ...)

Mettons-nous à la place du maître du jeu.

Nous souhaitons faire un choix rationnel :

- Quels sont les objectifs que nous voulons atteindre ?
- Dans quelles limites pouvons-nous choisir les règles ?
- Ayant fixé les règles, quel sera le comportement des acteurs ?
- Quelles règles mènent à un comportement souhaitable ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation. L'objectif peut se résumer comme $f: \{\text{informations privées}\} \times \{\text{règles}\} \rightarrow \{\text{comportements}\}$.

Parfois le « maître du jeu » peut fixer les règles. Par exemple :

- Le procureur dans le « dilemme du prisonnier »
- Une maison d'enchère fixe sa réglementation (ebay, par exemple)
- L'université fixe le cadre des études (prérequis, examens, ...)
- L'état fixe la législation (pénale, fiscale, ...)

Mettons-nous à la place du maître du jeu.

Nous souhaitons faire un choix rationnel :

- Quels sont les objectifs que nous voulons atteindre ?
- Dans quelles limites pouvons-nous choisir les règles ?
- Ayant fixé les règles, quel sera le comportement des acteurs ?
- Quelles règles mènent à un comportement souhaitable ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation. L'objectif peut se résumer comme $f : \{\text{informations privées}\} \times \{\text{règles}\} \rightarrow \{\text{comportements}\}$.

Parfois le « maître du jeu » peut fixer les règles. Par exemple :

- Le procureur dans le « dilemme du prisonnier »
- Une maison d'enchère fixe sa réglementation (ebay, par exemple)
- L'université fixe le cadre des études (prérequis, examens, ...)
- L'état fixe la législation (pénale, fiscale, ...)

Mettons-nous à la place du maître du jeu.

Nous souhaitons faire un choix rationnel :

- Quels sont les objectifs que nous voulons atteindre ?
- Dans quelles limites pouvons-nous choisir les règles ?
- Ayant fixé les règles, quel sera le comportement des acteurs ?
- Quelles règles mènent à un comportement souhaitable ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation. L'objectif peut se résumer comme $f: \{\text{informations privées}\} \times \{\text{règles}\} \rightarrow \{\text{comportements}\}$.

Exemple

Nous voulons vendre un objet aux enchères.

Chaque participant remet une enveloppe fermée annonçant la somme qu'il est prêt à payer. Le plus offrant obtient l'objet. (Dans le cas peu probable d'égalité on tire au sort entre les plus offrants.)

Deux variantes de paiement sont courantes :

- 1 Le gagnant paie la somme qu'il a annoncée.
- 2 Le gagnant paie la somme annoncée par le second.

Question

Nous, la maison d'enchère, avons le choix entre les deux mécanismes (et d'autres encore). Comment choisir ? Lequel est le meilleur ?

C'est le début de toute une théorie... et d'un autre exposé ?

Exemple

Nous voulons vendre un objet aux enchères.

Chaque participant remet une enveloppe fermée annonçant la somme qu'il est prêt à payer. Le plus offrant obtient l'objet. (Dans le cas peu probable d'égalité on tire au sort entre les plus offrants.)

Deux variantes de paiement sont courantes :

- 1 Le gagnant paie la somme qu'il a annoncée.
- 2 Le gagnant paie la somme annoncée par le second.

Question

Nous, la maison d'enchère, avons le choix entre les deux mécanismes (et d'autres encore). Comment choisir ? Lequel est le meilleur ?

C'est le début de toute une théorie... et d'un autre exposé ?

Exemple : les enchères

Exemple

Nous voulons vendre un objet aux enchères.

Chaque participant remet une enveloppe fermée annonçant la somme qu'il est prêt à payer. Le plus offrant obtient l'objet. (Dans le cas peu probable d'égalité on tire au sort entre les plus offrants.)

Deux variantes de paiement sont courantes :

- 1 Le gagnant paie la somme qu'il a annoncée.
- 2 Le gagnant paie la somme annoncée par le second.

Question

Nous, la maison d'enchère, avons le choix entre les deux mécanismes (et d'autres encore). Comment choisir ? Lequel est le meilleur ?

C'est le début de toute une théorie... et d'un autre exposé ?

Je mets un objet de valeur aux enchères, disons une pièce de 1€.

Ceci n'est plus un jeu théorique : puisque vous êtes maintenant devenus experts en théorie des jeux, on joue avec de vrai argent !

Les enchères se déroulent selon les règles suivantes :

- Chacun entre vous peut faire des enchères en annonçant la somme qu'il est prêt à payer.
- Le plus offrant gagne et obtient l'objet. Le deuxième et les suivants n'obtiennent rien.
- Attention : le premier **et le deuxième** paient la somme qu'ils ont annoncée.

Question

Est-ce un mécanisme raisonnable ? Qu'est-ce qui ne va pas ?

Je mets un objet de valeur aux enchères, disons une pièce de 1€.

Ceci n'est plus un jeu théorique : puisque vous êtes maintenant devenus experts en théorie des jeux, on joue avec de vrai argent !

Les enchères se déroulent selon les règles suivantes :

- Chacun entre vous peut faire des enchères en annonçant la somme qu'il est prêt à payer.
- Le plus offrant gagne et obtient l'objet. Le deuxième et les suivants n'obtiennent rien.
- Attention : le premier **et le deuxième** paient la somme qu'ils ont annoncée.

Question

Est-ce un mécanisme raisonnable ? Qu'est-ce qui ne va pas ?

Je mets un objet de valeur aux enchères, disons une pièce de 1€.

Ceci n'est plus un jeu théorique : puisque vous êtes maintenant devenus experts en théorie des jeux, on joue avec de vrai argent !

Les enchères se déroulent selon les règles suivantes :

- Chacun entre vous peut faire des enchères en annonçant la somme qu'il est prêt à payer.
- Le plus offrant gagne et obtient l'objet. Le deuxième et les suivants n'obtiennent rien.
- Attention : le premier **et le deuxième** paient la somme qu'ils ont annoncée.

Question

Est-ce un mécanisme raisonnable ? Qu'est-ce qui ne va pas ?

Cinq corsaires, nommés A, B, C, D, E, partagent leur butin de 100 pièces d'or selon leur coutume : le capitaine, A, propose un partage et tous les cinq passe au vote.

- Si la majorité accepte, le butin est partagé comme proposé.
- En cas de refus l'émeute s'éclate et A est jeté à la mer.

Les quatre corsaires restants recommencent alors selon le même procédé, avec B comme capitaine, et ainsi de suite. Un vote à égalité est considéré comme acceptation.

Exercices

- 1 Analyser ce conflit sous l'hypothèse de parfaite rationalité et sans coalitions. Comment change le résultat si un vote à égalité compte pour un refus ? Quelle règle le capitaine A préfère-t-il ?
- 2 Discuter les possibles évènements lorsque les corsaires peuvent former des coalitions. En quoi est-ce plus ouvert ?
- 3 Quel mécanisme proposez-vous pour se mettre d'accord sur le partage ? (si possible plus humain, plus démocratique, etc. . .)

Cinq corsaires, nommés A, B, C, D, E, partagent leur butin de 100 pièces d'or selon leur coutume : le capitaine, A, propose un partage et tous les cinq passe au vote.

- Si la majorité accepte, le butin est partagé comme proposé.
- En cas de refus l'émeute s'éclate et A est jeté à la mer.

Les quatre corsaires restants recommencent alors selon le même procédé, avec B comme capitaine, et ainsi de suite. Un vote à égalité est considéré comme acceptation.

Exercices

- 1 Analyser ce conflit sous l'hypothèse de parfaite rationalité et sans coalitions. Comment change le résultat si un vote à égalité compte pour un refus ? Quelle règle le capitaine A préfère-t-il ?
- 2 Discuter les possibles évènements lorsque les corsaires peuvent former des coalitions. En quoi est-ce plus ouvert ?
- 3 Quel mécanisme proposez-vous pour se mettre d'accord sur le partage ? (si possible plus humain, plus démocratique, etc. . .)

Cinq corsaires, nommés A, B, C, D, E, partagent leur butin de 100 pièces d'or selon leur coutume : le capitaine, A, propose un partage et tous les cinq passe au vote.

- Si la majorité accepte, le butin est partagé comme proposé.
- En cas de refus l'émeute s'éclate et A est jeté à la mer.

Les quatre corsaires restants recommencent alors selon le même procédé, avec B comme capitaine, et ainsi de suite. Un vote à égalité est considéré comme acceptation.

Exercices

- 1 Analyser ce conflit sous l'hypothèse de parfaite rationalité et sans coalitions. Comment change le résultat si un vote à égalité compte pour un refus ? Quelle règle le capitaine A préfère-t-il ?
- 2 Discuter les possibles évènements lorsque les corsaires peuvent former des coalitions. En quoi est-ce plus ouvert ?
- 3 Quel mécanisme proposez-vous pour se mettre d'accord sur le partage ? (si possible plus humain, plus démocratique, etc. . .)

Cinq corsaires, nommés A, B, C, D, E, partagent leur butin de 100 pièces d'or selon leur coutume : le capitaine, A, propose un partage et tous les cinq passe au vote.

- Si la majorité accepte, le butin est partagé comme proposé.
- En cas de refus l'émeute s'éclate et A est jeté à la mer.

Les quatre corsaires restants recommencent alors selon le même procédé, avec B comme capitaine, et ainsi de suite. Un vote à égalité est considéré comme acceptation.

Exercices

- 1 Analyser ce conflit sous l'hypothèse de parfaite rationalité et sans coalitions. Comment change le résultat si un vote à égalité compte pour un refus ? Quelle règle le capitaine A préfère-t-il ?
- 2 Discuter les possibles évènements lorsque les corsaires peuvent former des coalitions. En quoi est-ce plus ouvert ?
- 3 Quel mécanisme proposez-vous pour se mettre d'accord sur le partage ? (si possible plus humain, plus démocratique, etc. . .)