Une version abrégée de cet article est parue dans l'édition de décembre 2006
du « Gluon », le journal de vulgarisation scientifique de l'Université Joseph Fourier.

NŒUDS ET TRESSES

MICHAEL EISERMANN

RÉSUMÉ. Des nœuds, des tresses, et d'autres objets noués apparaissent non seulement dans la vie quotidienne, la marine et l'art décoratif, mais aussi en sciences. En biologie moléculaire, par exemple, l'ADN peut être noué, et généralement il l'est. En physique, certains modèles quantiques font apparaître des structures qui ressemblent à des tresses. En mathématiques, finalement, l'étude des nœuds sert à comprendre les espaces de dimension 3. Même à un niveau élémentaire le sujet révèle une richesse surprenante…

Vers la fin du XIXe siècle les physiciens spéculaient sur la nature des atomes. En 1867 Lord Kelvin proposa une nouvelle théorie, suivant laquelle les atomes sont des *nœuds* dans l'éther, à l'époque une idée tout à fait respectable. Conçue pour expliquer les éléments chimiques, cette approche a donné lieu aux premières tabulations et tentatives de classification de nœuds.

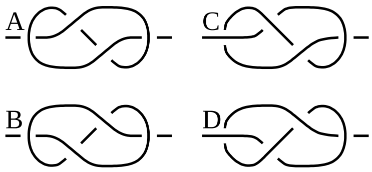
La théorie de Kelvin fut étudiée pendant deux décennies, avant d'être abandonnée au profit des modèles concurrents qui expliquaient mieux les expériences, de plus en plus fines. Ironiquement, la physique a récemment repris l'approche des nœuds, bien qu'à un tout autre niveau, avec la théorie des cordes.

Entre-temps, les mathématiciens se sont emparés de cette belle mais difficile théorie. La question de base reste la même : comment reconnaître et comment distinguer les nœuds ? Après un siècle d'importants progrès dans ce domaine, la réponse reste partielle.

QU'EST-CE QU'UN NŒUD ?

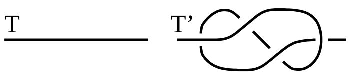
Toute démarche théorique demande d'abord de formaliser les objets dont on veut parler, et souvent le premier défi est de développer un modèle adéquat.

Pour un mathématicien, un nœud est une courbe dans l'espace, sans auto-intersections. Afin d'éviter que toute courbe ne se dénoue trivialement, nous sommes obligés de recoller les deux bouts (pour former un cercle noué) ou bien de les fixer à deux murs opposés (comme dans les dessins suivants).

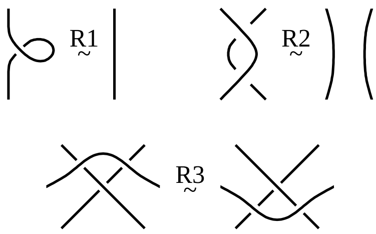


Définition. — On considère deux nœuds comme *équivalents* si l'on peut transformer l'un en l'autre de manière continue, sans jamais couper le nœud, ni passer par des auto-intersections.

Par exemple, le dessin suivant montre le nœud trivial T et un nœud équivalent T' :



Bien entendu, nos dessins ne montrent que des *diagrammes* de nœuds, c'est-à-dire, des projections sur le plan. La figure suivante explicite trois mouvements locaux qui transforment un diagramme donné en un diagramme d'un nœud équivalent :



Ils sont nommés en l'honneur de Kurt Reidemeister, qui montra en 1927 que ces trois mouvements suffisent :

Théorème. — *Deux diagrammes représentent deux nœuds équivalents si et seulement si l'on peut transformer l'un en l'autre par une suite de mouvements de Reidemeister.*

Ce résultat nous arrange bien, car il réduit l'étude des nœuds à l'étude de leurs diagrammes, qui se révèlent plus maniables.

Exemple. — Vous pouvez montrer que les images miroir C et D sont équivalentes : il suffit de les relier par une suite de mouvements élémentaires. (Deux ficelles pourraient aider…)

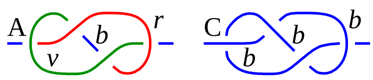
Il est beaucoup plus dur de montrer que A et B sont non équivalents, c'est-à-dire « chiraux », ni équivalents à C d'ailleurs. Essayez et vous verrez… Après réflexion, il ne suffit pas d'échouer ; pour une preuve il faut identifier l'obstacle.

INVARIANTS

Un *invariant* est une propriété qui ne change pas quand on passe d'un nœud à un nœud équivalent. Le nombre de croisements d'un diagramme, par exemple, n'est pas un invariant : il change lors d'un mouvement R1 ou R2.

Pour illustration, regardons un invariant simple mais ingénieux, inventé par Ralph Fox dans les années 1950.

Les règles du jeu. — On colorie chacun des arcs d'un diagramme avec une des trois couleurs rouge (r), bleu (b), vert (v). Seule restriction : à chaque croisement se rencontrent soit trois couleurs, soit une seule, mais jamais deux. Le résultat est appelé un *tricoloriage*.



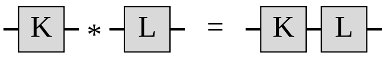
Exemple. — Avec un peu de patience vous trouverez que les diagrammes A et B admettent 9 tricoloriages chacun, alors que C et D n'en admettent que 3. Est-ce que ceci veut dire que A et C ne peuvent être équivalents ? Oui, grâce à l'argument suivant :

Théorème. — *Le nombre des tricoloriages d'un diagramme ne change pas lors d'un mouvement de Reidemeister : c'est un invariant du nœud.*

Ayant le langage des diagrammes à notre disposition, la preuve ne demande qu'une analyse soignée des mouvements R1, R2, R3. (Le résultat n'est pas difficile à montrer. Si vous voulez tenter l'aventure, n'hésitez pas à découvrir les arguments vous-même.)

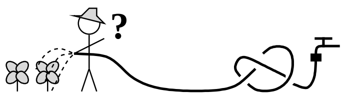
Multiplication

On peut multiplier des nœuds comme dans la figure suivante :



Ce produit est tout à fait remarquable : il est associatif et commutatif et admet le nœud trivial T pour élément neutre. Autrement dit, on peut très bien « calculer » avec les nœuds.

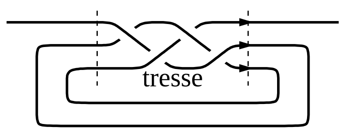
Question. — Le nœud A admet-il un nœud inverse A' tel que $A * A'$ soit équivalent au nœud trivial ? (Vous trouverez la réponse à l'aide des tricoloriages.)



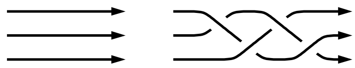
D'ailleurs, un nœud est dit *composé* s'il peut s'écrire comme produit $K * L$ de deux nœuds non triviaux. Sinon, il est dit *premier*. Cette appellation n'est pas choisie par hasard : il existe une correspondance bijective entre les nœuds (modulo équivalence) et les nombres naturels $1, 2, 3, \dots$, qui préserve la multiplication et qui met en correspondance nœuds premiers et nombres premiers. En langage mathématique, ces deux structures sont *isomorphes*. (Ce résultat profond fut établi en 1949 par Horst Schubert.)

Tresses

Après un bon nombre d'expériences on constate que tout nœud peut être représenté par une tresse comme suit :



Plus précisément, une *tresse* consiste en n brins allant de gauche à droite en s'enlaçant, mais sans jamais s'intersecter ni se retourner. Le dessin suivant montre la tresse triviale à trois brins ainsi qu'une tresse plus compliquée :



Comme avant les mouvements R2 et R3 engendrent l'équivalence des diagrammes de tresses (R1 ne s'applique plus). Tout comme les nœuds, les tresses peuvent être multipliées par concaténation. À nouveau le produit est associatif et admet la tresse triviale comme élément neutre. Mais cette fois-ci toute tresse a admet une tresse inverse b telle que le produit $a * b$ soit équivalent à la tresse triviale. En termes mathématiques, les tresses (modulo équivalence) forment un *groupe*, notion très importante en mathématiques et physique.

Exemple. — Une tresse à deux brins est décrite par le nombre de demi-tours que font les deux brins. Ainsi ces tresses forment un groupe isomorphe aux nombres entiers $(\mathbb{Z}, +)$.

Les tresses à trois brins sont plus compliquées, en particulier leur produit n'est plus commutatif. Néanmoins elles peuvent être représentées par des matrices, ce qui nous mène à des recherches très récentes.

Cette démarche mathématique et ses interactions avec la physique théorique ont vu un succès spectaculaire depuis les années 1980. On a ainsi découvert des liens et des structures inattendus, ainsi que de nouveaux invariants, dits « quantiques », beaucoup plus puissants que les tricoloriages. Ces progrès ont énormément fait avancer notre compréhension de ces objets noués, pas si ordinaires après tout.

Références

• Alexei Sossinsky, *Nœuds : Genèse d'une théorie mathématique*, Editions du Seuil, Paris 1999.

• Charles Livingston, *Knot theory*, Carus mathematical monographs, Washington 1993.

L'auteur

Originaire de Wiesbaden en Allemagne, j'ai étudié mathématiques et physique à Oldenburg puis à Bonn, en passant par Edinburgh et Strasbourg. J'ai enseigné pendant deux ans à l'ENS Lyon, avant d'obtenir en 2002 un poste de Maître de Conférences à Grenoble, au sein de l'équipe de topologie à l'Institut Fourier.

Mes recherches portent sur la topologie en petite dimension, notamment les nœuds, les tresses, et les espaces de dimension trois.

J'aime jongler non seulement avec des objets mathématiques, mais aussi avec des boules, des quilles ou des torches. Lors de la Fête de la Science j'ai même jonglé avec des nœuds.

Jonglage topologique

Prenez une corde d'environ 5mm d'épaisseur et au moins 1,5m de long, puis attachez au bout une balle de tennis, ou un autre contrepoids convenable. Maintenant, en ne tenant que le bout libre de la corde, effectuez un geste pour que la balle saute et produise un nœud.

Ce n'est pas facile, mais on peut y arriver... Me contacter pour des astuces de bricolage ou d'entraînement. (En aucun cas l'auteur ne sera tenu responsable d'éventuels dégâts. Ne commencez pas lorsque vous êtes entouré d'objets fragiles ou d'âmes sensibles.)

Question maths. — Supposons que vous avez produit le nœud A. (Félicitations !) Pouvez-vous le faire *disparaître* par un geste similaire ?

Institut Fourier, Université Grenoble I, France
URL: www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm