Mathématiques assistées par ordinateur

Examen de seconde session du 19 juin 2009, de 7h30 à 10h30, durée 3h.
Sont autorisés les documents du cours ainsi que la calculatrice ou Xcas sur PC.
Ce sujet comporte 2 pages. Les paragraphes sont indépendants.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.

1. Calcul d'une limite

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) := \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} \tag{1}$$

1.1. Déterminer sans recours à la calculatice ou à Xcas la limite $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$. (*Indication :* comparer avec la dérivée de la fonction $g(x) = \sqrt{9+x}$ en $x = 0$.) La suite $y_n := f(10^{-n})$ converge-t-elle pour $n \to \infty$? Si oui, vers quelle limite ?

1.2. Numériquement (avec une précision fixée, disons de 16 décimales par défaut) calculer des valeurs approchées $\tilde{y}_n$ de $y_n := f(10^{-n})$, par exemple en évaluant la formule (1) par

```
f(1.0e-1)
f(1.0e-2)
f(1.0e-3)
...
```

Quel comportement observez-vous pour $n = 1, 2, 3, \dots, 10, \dots, 20, \dots$?

1.3. Les résultats des questions précédentes sont-ils en accord ? Quel résultat vous paraît-il le plus fiable ? Comment expliquer le phénomène observé ?

1.4. Proposer une expression équivalente pour $f(x)$ qui donne une meilleure précision numérique quand x tend vers 0.

2. Série entières et intégration numérique

On considère la fonction « sinus cardinal » $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0, \\ 1 & \text{pour } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

On s'intéresse à la fonction « sinus intégral » $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$. En particulier on cherche à approcher numériquement l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$.

2.1. Développer f en une série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ en explicitant les coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

2.2. Expliciter la primitive F sous forme d'une série entière $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}$ en explicitant les coefficients $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. Quel est son rayon de convergence ?

2.3. Majorer l'écart entre l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ et la somme $s_m = \sum_{k=0}^{m} b_k$.

2.4. Déterminer le plus petit rang m tel que s_m approche I à 10^{-10} près.

2.5. Calculer ainsi une valeur approchée de I à 10^{-10} près.

3. Méthode de Newton

Dans cet exercice on considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 + 8. \tag{3}$$

3.1. Déterminer quatre nombres **entiers** $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ tels que $f(a_k)$ et $f(b_k)$, où $b_k = 1 + a_k$, soient de signes opposés. (Vous pouvez utiliser la calculatrice ou Xcas pour calculer les valeurs de $f(a_k)$ et $f(b_k)$, vous pouvez aussi faire représenter le graphe de f pour trouver des valeurs de a_k et b_K pertinentes.)

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet quatre solutions réelles distinctes, notées $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ telles que $r_k \in \,]a_k, b_k[$. On se propose d'appliquer la méthode de Newton pour approcher ces racines avec plus de précision.

3.2. Expliciter les fonctions dérivées f' et f'' et déterminer leurs racines.
Sur quels intervalles la fonction f est-elle croissante/décroissante ?
Sur quels intervalles la fonction f est-elle concave/convexe ?

On rappelle l'application de Newton $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ pour approcher une solution de l'équation $f(x) = 0$ à partir d'une valeur initiale u_0 par la suite itérative $u_{n+1} = \phi(u_n)$. Comme toujours il faut bien choisir la valeur initiale u_0 :

3.3. Pour la racine r_4 déterminer une valeur initiale entière $u_0 \in \mathbb{Z}$ pour laquelle vous pouvez garantir que la méthode de Newton donne une suite itérative $u_{n+1} = \phi(u_n)$ qui converge de manière monotone vers r_4. Justifiez votre choix. Même question pour les autres racines r_1, r_2, r_3.

3.4. Calculer des valeurs approchées $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3, \hat{r}_4$ des quatre racines r_1, r_2, r_3, r_4 par la méthode de Newton, comme préparée ci-dessus, en effectuant pour chacune 3 itérations à partir d'une valeur initiale entière.

3.5. Donner une majoration de l'écart $|r_4 - \hat{r}_4|$.

3.6. Vérifier l'approximation en développant $(x - \hat{r}_1)(x - \hat{r}_2)(x - \hat{r}_3)(x - \hat{r}_4)$.
Obtient-on le polynôme initial f exactement ? Est-ce alarmant ?