Mathématiques assistées par ordinateur

Examen final du 25 mai 2009, de 13h à 16h, durée 3h.

Sont autorisés les documents du cours ainsi que la calculatrice ou Xcas sur PC.
Ce sujet comporte 3 pages. Les paragraphes sont indépendants.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.

1. Racines d'un polynôme

1.1. On considère le polynôme $P = X^5 - 17X + 2$

(a) Combien admet-il de racines rationnelles, c'est-à-dire dans $\mathbb{Q}$?

(b) Combien admet-il de racines complexes, c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$?

(c) Combien admet-il de racines réelles, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$?

Vous pouvez, bien sûr, vous inspirer d'une graphique ou d'un calcul approché. Pour une justification rigoureuse, par contre, il faudra des arguments exacts. (Il existe – entre autre – des réponses simples, vérifiables sans ordinateur.)

2. Séries entières

On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.1. Supposons que pour $x \in [0,1]$ nous disposons d'une approximation de e^x à une précision de 10^{-10} près, c'est-à-dire, de 10 décimales significatives.

(a) Discuter brièvement la précision de la formule donnée ci-dessus pour f : en quoi pose-t-elle des problèmes numériques ?

(b) Concrètement, pour $x = 10^{-6}$ calculez e^x à l'aide de votre calculatrice ou de Xcas, et notez le résultat à 10 décimales. En déduire à la main une approximation de $f(x)$. Combien de décimales sont significatives ?

2.2. (a) En partant de la série de e^x en 0, déduire la série $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en explicitant les coefficients $a_k \in \mathbb{R}$.

Pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ on peut donc approcher $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ par la somme finie $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec reste $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$.

(b) Trouver le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n(x)| \leq 10^{-10}$ pour tout $x \in [0,1]$.

(c) Pour $x = 10^{-6}$ calculer ainsi une approximation de $f(x)$ à 10^{-10} près.

3. Racines de polynômes caractéristiques

On s'intéresse aux valeurs propres des matrices $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Remarque. Ce sont des matrices *tridiagonales* : les coefficients sur la diagonale de A_n sont $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors que sur les codiagonales (au dessus en en dessous de la diagonale) les coefficients sont égaux à 1. Les autres coefficients sont nuls.

Notation. Soit I_n la matrice identité de taille $n \times n$ et soit $P_n := \det(A_n - XI_n) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme caractéristique de A_n. Par convention on pose $P_0 := 1$ pour la matrice vide.

Remarque. Si vous utilisez la commande `charpoly`, notez qu'en Xcas le polynôme caractéristique de A_n est défini par $\det(XI_n - A_n)$ au lieu de $\det(A_n - XI_n)$. Cette convention change le signe : $\det(XI_n - A_n) = (-1)^n \det(A_n - XI_n)$.

Pour simplifier nous supposons d'abord que $a_k = 0$ pour tout k.

3.1. (a) On voit que $P_1 = -X$, puis on trouve $P_2 = X^2 - 1$. Expliciter les polynômes P_3, P_4, P_5 sous forme développée, puis tracer $P_1, \ldots, P_5$. Qu'observez-vous concernant les racines de P_k ?

(b) En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne ou colonne, établir une formule de récurrence de la forme $P_{k+1} = S_{k+1}P_k + T_{k+1}P_{k-1}$ avec des polynômes S_{k+1}, T_{k+1} que l'on déterminera.

(c) Établir une conjecture sur les valeurs de $P_k(-2)$ et $P_k(+2)$ en les calculant pour quelques valeurs de k, puis prouver cette conjecture.

(d) En fonction de $k \in \mathbb{N}$ déterminer le nombre des racines de P_k dans l'intervalle $[-2, +2]$. Y a-t-il des racines multiples ?

3.2. (a) Montrer qu'entre deux racines réelles d'un polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe (au moins) une racine réelle du polynôme dérivé P'.

(b) Soit P un polynôme de degré n dont toutes les racines sont réelles distinctes, et notons-les par $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Déterminer le nombre de racines réelles de P' et de P'' et les localiser par rapport aux racines de P.

3.3. Pour un rang $k \geq 2$ fixé on considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = P_k(x)$. On se propose d'approcher la plus petite racine r de f par la méthode de Newton. (Vous pouvez étudier le cas $k = 4$ si le cas général ne vous réussit pas.)

(a) Sur $[-\infty, r]$ la fonction f est-elle croissante ou décroissante ?
Sur $[-\infty, r]$ la fonction f est-elle concave ou convexe ? Justifier.

(b) Le point initial $u_0 = -2$ garantit-il la convergence monotone de l'itération de Newton $u_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}$ vers la plus petite racine r de f ?

(c) Pour $f = P_4$ et $u_0 = -2$ expliciter u_1, u_2, u_3 en appliquant trois itérations de Newton.

3.4. *Question bonus.* Regardons le cas général où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
On pose $u := \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} - 2$ et $v := \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + 2$

(a) Établir une récurrence $P_{k+1} = S_{k+1} P_k + T_{k+1} P_{k-1}$ dans le cas général.

(b) A-t-on $P_0(u) \leq P_1(u) \leq P_2(u) \leq \ldots$?
A-t-on un résultat analogue pour $(-1)^k P_k(v)$?
Si oui donner une preuve, si non donner un contre-exemple.

(c) Déterminer le nombre des racines de P_k dans l'intervalle $[u, v]$.

(d) Comment approcher la plus petite racine de P_k par la méthode de Newton ?