Mathématiques assistées par ordinateur

Examen partiel du 7 avril 2009, de 15h15 à 16h45, durée 1h30.

Sont autorisés les documents du cours ainsi que la calculatrice ou Xcas sur PC.
Ce sujet comporte deux pages. Les deux paragraphes sont indépendants.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.

1. Calcul approché

On part de l'identité suivante, qui est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$:

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = \frac{[1+\cos(x)][1-\cos(x)]}{x^2} \tag{1}$$

Nous allons utiliser ces expressions pour le calcul numérique approché. Supposons que nous calculons à une précision de 10^{-16} près (en termes d'erreur relative), ce qui veut dire que dans chaque étape du calcul on ne retient que 16 décimales.

1.1. À l'aide de votre calculatrice ou de Xcas, évaluez les trois expressions dans (1) ci-dessus, telles qu'elles sont explicitées, en mode approché pour $x = 10^{-8}$. (Cette valeur est aussi notée par `1.0e-8` sur calculatrice ou dans Xcas.)

1.2. Comment expliquer le désaccord entre ces trois calculs numériques ? Lequel des résultats vous paraît-il le plus proche de la valeur exacte ? Justifiez brièvement.

1.3. Développer $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 2 avec majoration du reste : autrement dit, trouver l'unique polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tel que $|\cos(x) - p(x)| \leq c|x|^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et expliciter la constante c.

1.4. Pour $x = 10^{-8}$ est-ce que 1 est une approximation de $\cos(x)$ à 10^{-16} près ? Majorer l'écart en utilisant $|\cos(x)-1| \leq |\cos(x)-p(x)| + |p(x)-1|$. Quelles conséquences a ce résultat pour vos calculs numériques ci-dessus ?

2. Méthodes de Banach et de Newton

On cherche à résoudre l'équation $2x\exp(x) = 1$.

2.1. Les équations $2x\exp(x) = 1$ et $\frac{1}{2}\exp(-x) = x$ ont-elles les mêmes solutions ? (Justifiez brièvement.) Combien de solutions admettent-elles dans $\mathbb{R}$?

2.2. Tracer sommairement la fonction $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\exp(-x).$$

On se propose de résoudre $g(x) = x$ par la méthode du point fixe de Banach.

(a) Montrer par une étude de fonction que g satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe, et expliciter la constante k de contraction.

(b) Partant de $x_0 = 0$ calculer les dix premiers termes $x_1, \ldots, x_{10}$ de la suite itérative $x_{n+1} = g(x_n)$ pour approcher le point fixe $a = g(a)$.

(c) Quelle précision pouvez-vous garantir ? Déterminer ainsi un encadrement de a.

2.3. Le point fixe de g est l'unique zéro de la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\exp(-x) - x.$$
On se propose de résoudre $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

(a) En étudiant la fonction f déterminer le point de départ $u_0 \in \{0,1\}$ (une des extrémités de l'intervalle) pour lequel le critère du cours garantit la convergence de la suite de Newton.

(b) Calculer les trois premiers termes u_1, u_2, u_3 de la suite de Newton pour approcher l'unique solution $a \in [0,1]$ vérifiant $f(a) = 0$.

(c) Quelle précision pouvez-vous garantir ?
Déterminer ainsi un encadrement de a.