Mathématiques assistées par ordinateur

Examen du 19 juin 2008, de 10h45 à 13h45, durée 3h.

Documents du cours et calculatrices autorisés.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.
Ce sujet comporte deux pages. Les trois paragraphes sont indépendants.

1. Calcul exact et calcul approché

On considère la fraction rationnelle

$$f(x,y) = \tfrac{11}{2}y^8 + \tfrac{1335}{4}y^6 + x^2\left(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2\right) + \tfrac{x}{2y}.$$

1.1. Évaluer f en $(x = 77617, y = 33096)$ en faisant deux calculs indépendants : l'un en mode approché et l'autre en mode exact. Comparer les résultats puis juger leur qualité : quel calcul vous semble préférable ?

1.2. Pour contrôler, évaluer f dans le point voisin $(x = 77617, y = 33095)$ par deux calculs indépendants, l'un en mode approché et l'autre en mode exact. Qu'observez-vous ? Expliquez le phénomène de l'exercice **1.1**.

2. Intégration numérique

Pour toute fonction continue $f\colon [-1,+1] \to \mathbb{R}$ on souhaite approcher l'intégrale $I(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$ par une méthode d'intégration numérique.

Une méthode de Newton-Cotes. — La première partie a pour but d'expliciter la méthode de Newton-Cotes pour $m = 3$. Pour ceci on considère les quatre points équidistants $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = +\frac{1}{3}$, $x_3 = +1$.

2.1. Expliciter les polynômes $L_0, L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{R}[X]_{\le 3}$ tels que $L = \sum_{k=0}^{3} L_k f(x_k)$ soit le polynôme interpolateur de Lagrange de f par rapport à x_0, x_1, x_2, x_3.

2.2. Déterminer les poids $w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$ tels que la méthode d'intégration numérique $S(f) = \sum_{k=0}^{3} w_k f(x_k)$ soit exacte pour les polynômes f de degré ≤ 3.

2.3. Quelle est l'erreur de cette méthode pour $f(x) = x^4$?

Une méthode de Gauss. — Pour approcher l'intégrale $I(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$ on considère la formule approchée $S(f) = f(-\xi) + f(\xi)$ où $\xi \in [0,1]$ est encore à déterminer.

2.4. Calculer $I(f)$ et $S(f)$ pour les polynômes $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$.

2.5. Déterminer l'ordre de l'approximation $S(f)$ en fonction de $\xi \in [0,1]$.

2.6. Quel est l'ordre maximal possible ? Pour quelle(s) valeur(s) de ξ est-il réalisé ?

3. Séries entières

On souhaite approcher l'exponentielle $\exp(x)$ pour $x \in [-10,+10]$. Afin d'assurer 10 décimales significatives, on s'autorise une erreur relative de 10^{-11}.

3.1. Sachant que $\exp(1) \in [2,3]$, encadrer l'image de $\exp\colon [-10,+10] \to \mathbb{R}$ (par une minoration et une majoration commodes mais pas trop grossières). Quel est l'erreur *absolue* ε tolérable sur l'intervalle $[-10,+10]$ afin de garantir partout une erreur *relative* majorée par $\delta = 10^{-11}$?

3.2. Rappeler la série entière $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en explicitant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Rappeler la majoration du reste $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x^k$ en fonction de m et x.

3.3. Déterminer m tel que le polynôme $e(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ approche $\exp(x)$ à ε près pour tout $x \in [-10,+10]$. Quels sont les inconvénients de cette approche ? Esquisser en quelques mots une approche alternative plus efficace.

On se propose ensuite d'implémenter $f(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2x}$ pour $x \in [-10,+10]$, avec $f(0) = 1$. On souhaite également assurer 10 décimales significatives.

3.4. Développer f en une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}$ en explicitant $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3.5. En comparant avec la majoration du reste pour $\exp(x)$ ci-dessus **(3.2)**, majorer le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k x^{2k}$ en fonction de n et x (en supposant $|x| \le n/2$).

3.6. Déterminer n tel que le polynôme $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k}$ approche $f(x)$ à 10^{-11} près pour tout $x \in [-1,+1]$. Est-ce une bonne idée pour $[-10,+10]$?

3.7. Admettons que nous disposons d'une approximation $e(x) \approx \exp(x)$ à 10 décimales significatives, implémentée efficacement. L'approximation de f par $h(x) = \frac{e(x)-e(-x)}{x}$ atteint-elle notre objectif ? pour quel $x \in [-10,+10]$?

3.8. En résumant, esquisser une approche efficace pour calculer $f(x)$.