Mathématiques assistées par ordinateur

Examen du 21 mai 2008, de 13h à 16h, durée 3h.

Documents du cours et calculatrices autorisés.
Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.
Ce sujet comporte deux pages. Les trois paragraphes sont indépendants.

Barème : 3 + 10 + 12 = 25 points, puis multiplication par 0.8

1. Calcul exact et calcul approché

Comparer, en calcul exact puis en calcul approché, les valeurs des expressions

$$\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}}.$$

En calcul approché, laquelle des deux valeurs calculées vous paraît-elle plus proche de la valeur exacte ? Justifier rapidement.

Correction : ► *En calcul exact les deux expressions donnent la même valeur, car*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}} &= \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}}\cdot\frac{\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}}}{\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}}}\\ &= \frac{\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}}}{(10^{11}+1)-(10^{11})} = \sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}}\end{aligned}$$

► *En calcul approché, disons avec une précision de 16 décimales, on trouve*

$$\begin{aligned}\sqrt{10^{11}+1} &\approx 316227.766018419 =: a,\\ \sqrt{10^{11}} &\approx 316227.766016838 =: b,\\ \textit{puis} \quad a-b &= \quad 0.000001581.\end{aligned}$$

En évaluant la seconde expression en calcul approché on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}} \approx \frac{1}{a+b} \approx 0.0000015811388300 80236$$

► *À cause de l'annulation des 12 premières décimales, la différence $a-b$ ne donne que 4 chiffres significatifs. À partir de la fraction $\frac{1}{a+b}$, par contre, on obtient 16 chiffres significatifs : ici il n'y pas de problème d'annulation, et la valeur calculée est nettement plus précise.*

Remarque : *La qualité des résultats dépend bien-sûr de la précision utilisée lors du calcul. Ainsi elle peut varier d'une machine à une autre, mais le principe reste le même : quelque soit la précision fixée, le premier calcul provoque une perte de précision, alors que le second calcul l'évite.*
Pour illustration, calculons avec 10 décimales. Ici $10^{11}+1$ et 10^{11} ne sont plus distingués, donc le calcul approché donne 0 dans le premier cas, mais $1.58113883\cdot 10^{-6}$ dans le second cas.
Le second calcul nécessite une division, certes, ce qui ajoute une petite erreur dans les dernières décimales. Mais le problème d'annulation dans le premier cas est beaucoup plus grave !

2. Séries entières et intégration numérique

On considère la fonction $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sin(x)}{x^3} & \text{pour } 0<x\le 1,\\ \frac{1}{6} & \text{pour } x=0.\end{cases}$$

On cherche à approcher l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

2.1. Développer f en une série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ en explicitant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Correction : *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a le développement*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \mp \dots.$$

► *Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on trouve*

$$f(x) = \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)!} x^{2k} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 - \frac{1}{9!}x^6 \pm \dots.$$

En $x = 0$ on a $f(0) = \frac{1}{3!}$ par définition. On conclut que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)!} x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : *Le rayon de convergence pour* sin *et pour f est ∞.*

2.2. Expliciter une primitive F sous forme d'une série entière $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}$.

Correction : ► *La série $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)!} x^{2k+1}$ vérifie $F'(x) = f(x)$.*

Remarque : *Les séries entières ont la propriété remarquable de pouvoir être dérivées termes à termes. Le rayon de convergence de F est le même que pour f, donc ∞ dans notre cas.*

2.3. Majorer l'écart entre l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ et la somme $s_m = \sum_{k=0}^{m} b_k$

Correction : *Pour l'intégrale on trouve $I = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)!}$.*

► *Il s'agit d'une série alternée : les termes $b_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)!}$ sont de signe alterné et décroissent en valeur absolue, $|b_0| > |b_1| > |b_2| > \dots$. On en déduit la majoration $|I - \sum_{k=0}^{m} b_k| \le |b_{m+1}|$.*

2.4. Déterminer le plus petit rang m tel que s_m approche I à 10^{-10} près.

Correction : ► *On trouve que $|b_4| \gtrapprox 0.278 \cdot 10^{-8}$ puis $|b_5| \lessapprox 0.146 \cdot 10^{-10}$, donc $m = 4$ convient.*

2.5. Calculer ainsi une valeur approchée de I à 10^{-10} près.

Correction : ► *On trouve après calcul que $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)!} = \frac{412239769}{2514758400} \approx 0.163928180536$.*

D'après le raisonnement ci-dessus on conclut que $I \approx 0.1639281805$ à 10^{-10} près.

Plus précisément on vient de prouver que $0.1639281805 < I < 0.1639281806$.

On souhaite comparer cette approche avec la méthode d'intégration de Simpson.

2.6. Expliciter la dérivée 4ème $f^{(4)}$ sous forme d'une série entière.

Correction : *Pour f nous avons déjà trouvé le développement*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)!} x^{2k} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 - \frac{1}{9!}x^6 \pm \dots.$$

► *Ceci entraîne que*

$$f^{(4)}(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{(2k+3)!} x^{2k-4} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7!} - \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{9!}x^2 \pm \dots.$$

2.7. En déduire un encadrement $0 \le f^{(4)} \le M$ en explicitant $M = \max_{[0,1]} f^{(4)}$.
(Le résultat se lit facilement sur la série, ce que l'on justifiera.)

Correction : ► *Pour tout $x \in [0,1]$ la série pour $f^{(4)}(x)$ est alternée : les termes sont de signe alterné et décroissent en valeur absolue, ce qui entraîne que $0 \le f^{(4)}(x) \le \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7!} = \frac{1}{210} \lessapprox 0.004762$.*

Remarque : *Le calcul de $f^{(4)}$ et la majoration précédente sont faciles à partir de la série entière, mais beaucoup plus laborieux à partir de l'expression $f(x) = \frac{x-\sin(x)}{x^3}$.*

2.8. Déterminer le plus petit n tel que la méthode de Simpson à n subdivisions approche $I = \int_0^1 f(x)dx$ à 10^{-10} près. (Précisons qu'avec n subdivisions cette méthode évalue f en $2n+1$ points équirépartis. Pour vous dépanner vous pouvez admettre l'encadrement $0 \leq f^{(4)} \leq 0.01$ mais ce n'est pas la valeur optimale.)

Correction : ► *La méthode de Simpson à n subdivision approche l'intégrale à un écart $\frac{1}{2880}\frac{1}{n^4}M$ près. On cherche n tel que $\frac{1}{2880}\frac{1}{n^4}M \leq 10^{-10}$. Avec $M = \frac{1}{210}$ il faut $n^4 \gtrapprox 16535$, donc $n = 12$ convient. Avec $M = 0.01$ il faut $n^4 \gtrapprox 34723$, donc $n = 14$ convient.*

2.9. Essayons finalement d'approcher I à 10^{-20} près. Déterminer les rangs m et n pour les deux méthodes, comme ci-dessus. Quelle méthode est préférable ?

Correction : *On reprend la série $I = F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ où $b_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)!}$. ► Par tâtonnement on trouve $b_8 \gtrapprox 4.83 \cdot 10^{-19}$ et $b_9 \lessapprox 1.04 \cdot 10^{-21}$, donc $m = 8$ convient. Puisque m est petit, il est facile de calculer le début $\sum_{k=0}^{m} b_k$ de la série de $F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, et le calcul est peu coûteux.*
Pour Simpson, on cherche n tel que $\frac{1}{2880}\frac{1}{n^4}M \leq 10^{-20}$. ► Avec $M = \frac{1}{210}$ il faut $n^4 \gtrapprox 1.6534 \cdot 10^{14}$, donc $n \geq 3586$. On constate qu'à cette échelle la méthode de Simpson est beaucoup plus coûteuse. (Chaque évaluation de f en un des $2n+1$ points nécessite en elle-même le calcul d'une série.)

3. Racines de polynômes

Les *polynômes de Tchebychev* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ commençant par $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ puis définis, pour $n \geq 1$, par la récurrence $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

3.1. Expliciter P_2, P_3, P_4. Tracer l'allure des courbes représentatives de P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 sur l'intervalle $[-1,+1]$. En déduire, pour chacun de ces polynômes, le nombre des racines dans $[-1,+1]$.

Correction : ► *À partir de $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ on trouve $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 3X$, $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Évidemment, P_0 n'a pas de racine, et P_1 n'a que la racine 0. En traçant leurs graphes on s'aperçoit que P_2 a 2 racines dans $[-1,+1]$, que P_3 en a 3, et que P_4 en a 4. (On soupçonne déjà que P_n a n racines distinctes dans $[-1,+1]$, mais il faudra le prouver.)*

Remarque : *Plus explicitement, on peut séparer les racines comme suit :*

$$P_2(-1) = 1,\ P_2(0) = -1,\ P_2(1) = 1 \ \Rightarrow \text{2 racines}$$
$$P_3(-1) = -1,\ P_3(-0.5) = 1,\ P_3(0) = 0,\ P_3(0.5) = -1,\ P_3(1) = 1 \ \Rightarrow \text{3 racines}$$
$$P_4(-1) = 1,\ P_4(-0.5) = -0.5,\ P_4(0) = 1,\ P_4(0.5) = -0.5,\ P_4(1) = 1 \ \Rightarrow \text{4 racines}$$

3.2. Par récurrence, déterminer le degré, le coefficient dominant, et la parité de P_n.
Rappel : P est appelé *pair* si $P(-X) = P(X)$ et *impair* si $P(-X) = -P(X)$.

Correction : ► *Montrons que $\deg P_n = n$. C'est vrai aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, puis $\deg(2XP_n) = n+1$ et $\deg P_{n-1} = n-1$ impliquent que $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ est de degré $\deg P_{n+1} = n+1$.*
Quant au coefficient dominant on trouve que $\operatorname{dom} P_0 = 1$ puis $\operatorname{dom} P_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Effectivement, $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ implique que $\operatorname{dom} P_{n+1} = 2 \operatorname{dom} P_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.
La parité est telle que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai au rangs 0 et 1, puis $P_{n+1}(-X) = 2(-X)P_n(-X) - P_{n-1}(-X) = (-1)^{n+1}2XP_n - (-1)^{n-1}P_{n-1} = (-1)^{n+1}P_{n+1}$.

3.3. Calculer $P_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : ► *Montrons que $P_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $P_0(1) = 1$ et $P_1(1) = 1$. Si l'hypothèse est vraie jusqu'au rang n, alors $P_{n+1}(1) = 2P_n(1) - P_{n-1}(1) = 2 - 1 = 1$. Par un argument similaire (ou en utilisant la parité) on trouve $P_n(-1) = (-1)^n$.*

3.4. Pour $n \in \mathbb{N}$ déterminer le nombre des racines de P_n dans l'intervalle $[-1,+1]$.
Justifiez votre démarche : Quel résultat du cours utilisez-vous ?
Vérifiez ses hypothèses, puis détaillez son application.

Correction : ▶ *L'observation-clé est que $P_n, \dots, P_0$ est une suite de Sturm.* ▶ *On a déjà calculé que $P_n(1) = \cdots = P_0(1) = 1$, donc $V_1(P_n, \dots, P_0) = 0$. De même, $P_k(-1) = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $V_{-1}(P_n, \dots, P_0) = n$.* ▶ *D'après le théorème de Sturm on a $\operatorname{Ind}_{-1}^{+1}\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right) = n$. La fraction $\frac{P_{n-1}}{P_n}$ a donc (au moins) n pôles, et le dénominateur P_n a (au moins) n racines dans $[-1, +1]$. Or, P_n est un polynôme de degré n et admet donc au plus n racines. On conclut que P_n a n racines réelles distinctes et elles se trouvent toutes dans $]-1, +1[$.*

Pour un rang $n \geq 2$ fixé on considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = P_n(x)$. On se propose d'approcher la plus grande racine r de f par la méthode de Newton.

3.5. Sur $[r, +\infty[$ la fonction f est-elle croissante ou décroissante ?
Sur $[r, +\infty[$ la fonction f est-elle concave ou convexe ?

Correction : ▶ *Le coefficient dominant de P_n est positif, donc $P_n(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$. Il en est de même pour ses dérivés P_n' et P_n''. On a déjà montré que P_n a toutes ses n racines dans $]-1, +1[$. Si r est la plus grande racine de P_n, alors toutes les racines se trouvent dans $[-r, r]$.* ▶ *Entre deux racines de P_n se trouve (au moins) une racine de P_n', donc P_n' a toutes ses $n-1$ racines dans $]-r, r[$. De même pour P_n''. Sur $[r, +\infty]$ on conclut que P_n' et P_n'' ne changent pas de signe, donc $P_n' > 0$ et $P_n'' > 0$. Autrement dit, P_n est strictement croissante et convexe sur $[r, +\infty]$.*

3.6. Le point initial $u_0 = 1$ garantit-il la convergence de l'itération de Newton, c'est-à-dire de la suite itérative définie par $u_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, vers la plus grande racine r de f ?

Correction : ▶ *Le cours nous fournit le résultat adéquat : comme f est croissant et convexe sur $[r, 1]$, le point initial $u_0 = 1$ garantit la convergence monotone $u_k \searrow r$.*

3.7. Pour $f = P_4$ et $u_0 = 1$ expliciter u_3 en appliquant trois itérations de Newton.

Correction : ▶ $u_1 = \frac{15}{16} = 0.9375$, $u_2 = \frac{86083}{93120} \approx 0.9244$, $u_3 = \frac{30360277173774519121}{32861693194944177920} \approx 0.9238805$.
Remarque : *Ces trois termes décroissent, en accord avec le résultat général. On constate aussi, comme assez souvent dans ce genre d'itération, que le calcul exact dans $\mathbb{Q}$ devient vite très lourd, alors que le calcul approché est largement suffisant et plus économe.*

3.8. Majorer l'écart entre la valeur calculée u_3 et la racine cherchée r.

Correction : ▶ *D'après le cours on a $0 \leq u_n - r \leq \frac{f(u_n)}{f'(a)}$ pourvu que $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifie $f(a) \leq 0 < f(b)$ ainsi que $f'(a) > 0$ et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$, et r est l'unique racine de f dans $[a, b]$. Dans notre cas on a $b = 1$ et on aimerait prendre $a = r$, mais malheureusement on ne connaît pas r avec précision.* ▶ *On pourra essayer $a = 0.92$. En effet $f(a) \lessapprox -0.04 < 0$ et $f'(a) \gtrapprox 10 > 0$. Le graphe (ou le raisonnement sur les racines ci-dessus) montre que f' et f'' n'ont pas de racine $\geq a$, donc f est croissante et convexe sur $[a, b]$. Appliqué à notre cas ceci donne $0 \leq u_n - r \leq \frac{f(u_n)}{f'(a)} \lessapprox 10^{-6}$.*

Remarque : *Pour information, les six premiers termes de l'itération de Newton sont :*

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 1.000000000000000000000000000000\ldots \\
u_1 &= \underline{0.9}37500000000000000000000000000\ldots \\
u_2 &= \underline{0.92}4430841924398625429553264605\ldots \\
u_3 &= \underline{0.9238}80488861891465040795431061\ldots \\
u_4 &= \underline{0.923879532514}171707036220347034\ldots \\
u_5 &= \underline{0.92387953251128675612820}9442635\ldots \\
u_6 &= \underline{0.923879532511286756128183189397}\ldots
\end{aligned}
$$

Ici on a calculé avec une précision de 30 décimales. On constate que le nombre de décimales valables double à peu près à chaque itération (comme il faut, car la suite construite par la méthode de Newton converge quadratiquement). À noter que $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5 > u_6 > \cdots > r$. Ainsi on obtient une minoration de l'erreur, $u_3 - r > u_3 - u_4 \geq 0.95 \cdot 10^{-6}$. Par conséquent notre majoration $u_3 - r \leq 10^{-6}$ est assez précise et ne peut être améliorée de beaucoup.