Mathématiques assistées par ordinateur

Examen partiel du 21 mars 2008, de 7h30 à 9h30, durée 2h.

Documents du cours et calculatrices autorisés.

Justifiez vos réponses — brièvement mais suffisamment.

Ce sujet comporte deux pages. Les trois paragraphes sont indépendants.

1. Développement binaire

1.1. Écrire le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ (dont l'écriture en base 10 est $0.3333\ldots$) comme un nombre à virgule en base 2 (obtenu par division de 1 par 3 en base 2). Quelle est la période du développement obtenu ?

1.2. Calculer la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots$.
Y a-t-il un rapport avec la question précédente ?

2. Séries entières

On se propose de calculer une valeur approchée de $I := \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$.

2.1. Rappeler la série entière de la fonction exponentielle développée en 0, et en déduire une série entière pour $f(x) = \exp(-x^2/2)$ sous la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$. (Le rayon de convergence de cette série entière est ∞.)

2.2. Expliciter une fonction primitive F comme une série entière $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}$ vérifiant $F' = f$ et $F(0) = 0$.

2.3. La série numérique $F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ s'avère alternée.
Déterminer le plus petit rang n tel que $|b_{n+1}| \leq 10^{-10}$.
Calculer ainsi une valeur approchée de I à 10^{-10} près.

2.4. On approche la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ par le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{11} b_k x^{2k+1}$.
Pour $x \in [0,2]$ majorer l'erreur $|F(x) - P(x)|$ dans le pire des cas.

3. Méthode de Newton

Dans cet exercice on considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 + 8.$$

3.1. Déterminer quatre nombres entiers $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ tels que $f(a_k)$ et $f(b_k)$, où $b_k = 1 + a_k$, soient de signes différents. (Vous pouvez utiliser la calculatrice pour calculer les valeurs de $f(a_k)$ et $f(b_k)$, vous pouvez aussi représenter le graphe de f sur la calculatrice pour trouver des valeurs de a_k pertinentes.)

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet quatre solutions réelles distinctes, notées $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ telles que $r_k \in]a_k, b_k[$. On se propose d'appliquer la méthode de Newton pour approcher ces racines avec plus de précision.

3.2. (a) Expliciter les fonctions dérivées f' et f'' et déterminer leurs racines.
Sur quels intervalles la fonction f est-elle croissante/décroissante ?
Sur quels intervalles la fonction f est-elle concave/convexe ?

(b) Expliciter l'application ϕ de la méthode de Newton pour approcher une solution de l'équation $f(x) = 0$ à partir d'une valeur initiale u_0 par la suite itérative $u_{n+1} = \phi(u_n)$.

(c) Pour la racine r_4 déterminer une valeur initiale entière $u_0 \in \mathbb{Z}$ pour laquelle vous pouvez garantir que la méthode de Newton donne une suite itérative $u_{n+1} = \phi(u_n)$ qui converge de manière monotone vers r_4. Justifiez votre choix. Même question pour les autres racines r_1, r_2, r_3.

3.3. (a) Calculer des valeurs approchées $\hat{r}_1$, $\hat{r}_2$, $\hat{r}_3$, $\hat{r}_4$ des quatre racines r_1, r_2, r_3, r_4 par la méthode de Newton, comme préparée ci-dessus, en effectuant pour chacune 3 itérations.

(b) Donner une majoration de l'écart $|r_4 - \hat{r}_4|$.

(c) Vérifier l'approximation en développant $(x - \hat{r}_1)(x - \hat{r}_2)(x - \hat{r}_3)(x - \hat{r}_4)$. Obtient-on le polynôme initial f exactement ?