Mathématiques assistées par ordinateur

Chapitre 5 : Développement de Taylor et séries entières

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009
www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜eiserm/cours # mao
Document mis à jour le 6 juillet 2009

INSTITUT FOURIER
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER GRENOBLE 1 SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ

Objectif : des polynômes aux séries

Rappel : avec les quatre opérations arithmétiques $+$, $-$, $*$, $/$
on peut construire des polynômes et des fractions rationnelles.

Prochaine étape : construire des fonctions plus générales comme

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots \\
\ln(1+x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \dots \\
\sin(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \dots
\end{aligned}$$

Problème : quel sens donner aux trois petits points « . . . » ?
Comment rendre ces formules rigoureuses ? Deux possibilités :

1. Développement fini : polynôme de Taylor $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ + erreur !
2. Développement infini : série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ + convergence !

Les deux approches sont très importantes dans les applications.

Sommaire

Développement de Taylor

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$.

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.

Ses dérivées seront notées $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

Définition

Le ***développement de Taylor*** de f à l'ordre n en x_0 est le polynôme

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ainsi les dérivées de f en T_n coïncident en x_0 jusqu'à l'ordre n.

⚠ En général les fonctions f et T_n sont très différentes !
(On a $f = T_n$ si et seulement si f est un polynôme de degré $\leq n$.)
On peut néanmoins espérer que T_n approche f autour de x_0.

Notation

Le terme d'erreur sera noté $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$.

Autrement dit, on a $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.
Il faut maintenant contrôler le reste $R_n(x)$.

Le théorème de Taylor–Lagrange

Théorème (contrôle du terme d'erreur)

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I.
Alors pour tout $x_0, x \in I$ il existe $\xi \in \langle x_0, x\rangle$ tel que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polynôme de Taylor } T_n(x)} \quad + \quad \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{terme d'erreur } R_n(x)}$$

Ici on utilise la notation $\langle a, b\rangle = \{(1-t)a + tb \mid 0 < t < 1\}$.
Ainsi $\xi \in \langle x_0, x\rangle$ veut dire que « ξ est situé entre x_0 et x ».

Remarque (TAF)

Pour $n = 0$ nous avons le théorème des accroissements finis :

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \quad \text{pour un} \quad \xi \in \langle x_0, x\rangle.$$

Le théorème de Taylor–Lagrange en est une généralisation.

Démonstration du théorème de Taylor–Lagrange

On fixe $x \in I$ et on définit $M \in \mathbb{R}$ par $f(x) = T_n(x) + M(x - x_0)^{n+1}$.

Nous voulons montrer que $M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ pour un $\xi \in \langle x_0, x \rangle$.

Pour $t \in \langle x_0, x \rangle$ nous définissons

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t - x_0)^{n+1}.$$

En dérivant $n + 1$ fois nous obtenons

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!M.$$

Il suffit donc de prouver que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ pour un $\xi \in \langle x_0, x \rangle$.

Par construction $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pour $k = 0, \ldots, n$, donc

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

D'abord $g(x_0) = g(x) = 0$, d'où $g'(\xi_1) = 0$ pour un $\xi_1 \in \langle x_0, x \rangle$.
Ensuite $g'(x_0) = g'(\xi_1) = 0$, d'où $g'(\xi_2) = 0$ pour un $\xi_2 \in \langle x_0, \xi_1 \rangle$.
Enfin $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(\xi_n) = 0$, d'où $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ pour un $\xi \in \langle x_0, \xi_n \rangle$.

Application à l'exponentielle

Théorème

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *une fonction vérifiant* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$*.*
Alors $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

Démonstration. Nous avons $f \in C^\infty$ et $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose donc $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
D'après le théorème de Taylor–Lagrange il existe $\xi_n \in \langle 0, x \rangle$ tel que

$$f(x) = s_n + f(\xi_n) \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x \geq 0$ on a $1 \leq f(\xi_n) \leq f(x)$ car f est croissante. Ainsi

$$|f(x) - s_n| \leq f(x) \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Pour $x \leq 0$ on a $f(x) \leq f(\xi_n) \leq 1$ et ainsi

$$|f(x) - s_n| \leq \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Dans les deux cas on conclut que $s_n \to f(x)$. $\square$

Application à sinus et cosinus

Théorème

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to [-1,+1]$ *deux fonctions vérifiant* $f' = g$ *et* $g' = -f$ *ainsi que* $f(0) = 0$ *et* $g(0) = 1$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *nous avons alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x) \quad \textit{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x).$$

Démonstration. Nous avons $f, g \in C^\infty$ et $f^{(k)}(0) = 0, 1, 0, -1, \dots$ ainsi que $g^{(k)} = 1, 0, -1, 0, \dots$ de période 4 pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose donc

$$s_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

D'après le théorème de Taylor–Lagrange il existe $\xi_n \in \langle 0, x \rangle$ tel que

$$f(x) = s_n + (-1)^{n+1} f(\xi_n) \tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Notre hypothèse $|f| \le 1$ assure que

$$|f(x) - s_n| \le \tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0.$$

Pour g l'argument est analogue. $\square$

Implémentation de l'exponentielle

Objectif : approcher $f(x) = \exp(x)$ à $\varepsilon = 10^{-20}$ près où $x \in [0,1]$.

Approximation : on développe f en $x_0 = 0$ à l'ordre n.
On a $f^{(k)} = \exp$, donc $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Majoration de l'erreur : $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in \langle x, x_0 \rangle$.

$$|R_n(x)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!} \quad \overset{!}{\leq} \quad \varepsilon = 10^{-20}$$

Pour cette majoration on utilise $x \in [0,1]$ et que $\exp$ est croissante.
On trouve n par tâtonnement : ici $n = 21$ convient.

Implémentation : Pour évaluer le polynôme T_n on utilisera Horner !

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{x}{n} + 1\Big)\frac{x}{n-1} + 1\Big)\frac{x}{n-2} + 1\Big)\ldots\Big)\frac{x}{2} + 1\Big)\frac{x}{1} + 1$$

Implémentation de l'exponentielle (suite)

Objectif : approcher $\exp(x)$ où $x \in [-1000000, +1000000]$
à une erreur relative de $\varepsilon = 10^{-14}$ près.

Idée naïve : On applique directement le développement de Taylor.

Pour $R_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ on exige que $|R_n(x)/\exp(x)| \leq \varepsilon$.

Mais pour $x = 1000000$ on obtient $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \varepsilon$ seulement pour $n \gg 1000000$. Cette approche est donc hors de question !

Réduction de l'argument : On se ramène à l'intervalle $[0, 1]$.
Pour ce faire on utilise nos connaissances de la fonction $\exp$.

- Pour $x < 0$ on applique la formule $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$.
- Pour $x \in [0, 1]$ le calcul de $\exp(x)$ est facile.
  On vient de l'implémenter à une erreur relative de 10^{-20} près.
- Pour $x \in]1, 2]$ on a $x = 2x_0$ où $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1]$,
  puis on calcule $\exp(x) = \exp(2x_0) = \exp(x_0)^2$.
- Tout $x \in]1, 1000000]$ s'écrit comme $x = x_0 \cdot 2^k$ où $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $k \in \{1, \dots, 20\}$. Ainsi $\exp(x) = \exp(x_0 \cdot 2^k) = \exp(x_0)^{2^k}$.

Ce calcul revient à élever k fois au carré. Chaque fois l'erreur relative est multipliée par 2, donc tout au plus par $2^{20} = 1048576 \approx 10^6$.

Objectif : des polynômes aux séries

Un polynome $P \in \mathbb{C}[Z]$ est une expression formelle $P = \sum_{k=0}^{n} c_k Z^k$.
Il est déterminé par la suite finie $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ de ses coefficients.
Ceci permet d'effectuer toutes les operations algébriques usuelles.

⚠ À tout polynôme $P \in \mathbb{C}[Z]$ on associe la fonction polynomiale correspondante $f_P \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f_P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$. Par abus de langage on identifie souvent le polynôme P et la fonction f_P.

Une série formelle $P \in \mathbb{C}[[Z]]$ est une expression $P = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$.
Elle est déterminée par la suite infinie $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{C}$ des coefficients.
Ceci permet d'effectuer toutes les operations algébriques usuelles.

⚠ À une telle série formelle $P \in \mathbb{C}[[Z]]$ on veut associer la fonction correspondante f_P définie par la série entière $f_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.
Or, $f_P(z)$ n'est définie que si cette série dans $\mathbb{C}$ converge !

A priori il faut donc bien distinguer la série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k$ et la série entière $f_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Dans la suite nous étudierons le domaine de convergence de f_P puis ses propriétés.

Révision : rappels d'analyse

Supposons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).$$

Si $R_n(x) \to 0$ pour $n \to \infty$, alors $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converge vers

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Pour cela il faut donner un sens rigoureux à des notions comme

limite d'une suite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, par exemple $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$,

série numérique $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, par exemple $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} = e$,

série entière $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, par exemple $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!} = \exp(z)$.

Je renvoie à l'aide-mémoire pour ces notions d'analyse qui seront indispensables pour bien fonder le développement qui suit.

Séries formelles : « polynômes de degré infini »

Définition

Une ***série formelle*** est une expression de la forme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$.

Ici Z n'est qu'une variable formelle (et non un nombre).
De même P n'est qu'une série formelle (et non une fonction).
Ce qui compte est seule la suite des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k = b_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Si $a_k = 0$ pour tout $k > n$ il s'agit d'un polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k Z^k$.
On peut définir les opérations formelles usuelles :

Addition : $$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) Z^k$$

Multiplication : $$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}\Big) Z^k$$

Dérivation : $$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k\Big)' := \sum_{k=1}^{\infty} (k a_k)\, Z^{k-1} := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}\, Z^k$$

Rayon de convergence

On considère une série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$.

Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge-t-elle ?

Exemples

La série $\sum k!\, z^k$ converge pour $z = 0$ mais diverge pour tout $z \neq 0$.

La série $\sum z^k$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

La série $\sum \frac{1}{k!}\, z^k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème

*Pour toute série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ il existe un nombre $\rho_P \in [0, +\infty]$, appelé le **rayon de convergence** de P, tel que*

- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \rho_P$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge.*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > \rho_P$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ diverge.*

Ce rayon est donné par $\rho_P^{-1} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$.

Par exemple, si $|a_k| \leq M\rho^{-k}$ pour tout $k \geq k_0$, alors $\rho_P \geq \rho$ et la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$.

Rayon de convergence : démonstration

Lemme

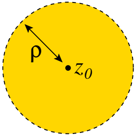
Supposons que $(a_k z_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reste bornée pour un* $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*.*
C'est le cas, par exemple, si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ *converge, puisque* $a_k z_1^k \to 0$*.*
Alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *converge absolument pour tout* z *vérifiant* $|z| < |z_1|$*.*

Démonstration du lemme.
Nous avons $M := \sup |a_k z_1^k| < \infty$ ainsi que $q := \frac{|z|}{|z_1|} < 1$.
Ceci implique que $|a_k z^k| = |a_k z_1^k| \cdot \frac{|z^k|}{|z_1^k|} = |a_k z_1^k| \cdot q^k \leq M q^k$.
On conclut par comparaison avec la série géométrique :
$\sum_{k=0}^{n} |a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^{n} M q^k = M \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \leq M \frac{1}{1-q}$. □

Démonstration du théorème.
Pour $0 < \rho < \rho_P$ on a $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \rho < 1$.
Ainsi $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot \rho \leq \rho_0 < 1$ donc $|a_k| \rho^k \leq \rho_0^k \to 0$.
On voit en particulier que la suite $(a_k \rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ reste bornée.
On conclut que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge pour tout z vérifiant $|z| < \rho < \rho_P$.
Pour $|z| > \rho_P$ on a $\limsup |a_k z^k| = \infty$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ diverge. □

Séries entières

On note $B(z_0,\rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$
le disque ouvert de rayon ρ centré en z_0.
En particulier $B(z_0, 0) = \emptyset$ et $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$.



Théorème

Toute série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ d'un rayon de convergence $\rho_P > 0$ définit une fonction

$$f_P \colon B(0,\rho_P) \to \mathbb{C} \quad \textit{par} \quad f_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

La fonction f_P est continue et dérivable sur tout le disque $B(0,\rho_P)$. Sa dérivée f_P' est donnée par la série formelle $P' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k Z^{k-1}$, qui a le même rayon de convergence $\rho_{P'} = \rho_P$:

$$f_P'(z) = f_{P'}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

En itérant cet argument, on voit que f_P est infiniment dérivable.

En particulier on retrouve les coefficients $a_k = \frac{f_P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Séries entières : démonstration

Vérifions d'abord que $\rho_{P'} = \rho_P$. Puisque $\sqrt[k]{k} \to 1$ nous trouvons que

$$\rho_{P'}^{-1} = \limsup \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \rho_P^{-1}.$$

Ainsi $f_{P'}$ est définie sur $B(0, \rho_P)$. Nous voulons montrer que

$$f'_P(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \text{existe et coïncide avec} \quad f_{P'}(z)$$

pour tout $z \in B(z_0, \rho_P)$. Ceci découle du calcul suivant :

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f_{P'}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{w^k - z^k}{w - z} - k z^{k-1} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[(w-z) \sum_{j=1}^{k-1} j w^{k-j-1} z^{j-1} \right] = (w-z) \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} j w^{k-j-1} z^{j-1}.$$

Pour $|w|, |z| < \rho < \rho_P$ nous avons donc

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f_{P'}(z) \right| \le |w - z| \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^2 \rho^{k-2} \le |w - z| \cdot \text{const.}$$

Pour $w \to z$ on trouve ainsi que f_P est dérivable et que $f'_P = f_{P'}$. $\square$

Séries entières : addition et multiplication

Théorème

Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k$ *deux séries formelles qui convergent sur le disque* $B(0,\rho)$*, c'est-à-dire que* $\rho_P, \rho_Q \geq \rho$.

Alors les séries formelles $P+Q$ *et* $P \cdot Q$ *convergent sur* $B(0,\rho)$ *et*

$$f_{P+Q} = f_P + f_Q \quad \textit{et} \quad f_{P\cdot Q} = f_P \cdot f_Q.$$

Démonstration. Pour tout $z \in B(0,\rho)$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k}(a_\ell b_{k-\ell}) z^k = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j\Big).$$

La dernière égalité découle de la multiplication et le réarrangement des séries absolument convergentes. □

Séries entières : dérivation et intégration

Exemple (la série exponentielle)

Pour la série formelle $P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ on trouve :

$$P' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = P$$

Comme $\rho_P = \infty$, la fonction $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ est dérivable, et la dérivée formelle $P' = P$ implique que $f' = f$.

Remarque

L'intégration de séries entières fonctionne de manière analogue :

$$f \colon B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

a pour primitive

$$g \colon B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

où $b_k = \frac{1}{k} a_{k-1}$ pour $k \geq 1$, et b_0 est la constante d'intégration.

Exemples de développements en série

Exemple (le logarithme naturel $\ln$)

Considérons $f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$.
On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$ pour $|x| < 1$.
Par intégration on obtient $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ pour $|x| < 1$.

⚠ Bien que f soit définie sur $]-1,\infty[$, le développement en série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ ne converge que pour $x \in]-1,+1]$.
En $x = -1$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} = -\infty$ diverge (série harmonique).
En $x = 1$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (série alternée, Leibniz).

Exemple (la fonction $\arctan$)

Considérons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x)$.
On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$ pour $|x| < 1$.
Par intégration on obtient $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ pour $|x| < 1$.

⚠ Bien que f soit définie sur tout $\mathbb{R}$, le développement en série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ne converge que pour $x \in [-1,+1]$.

Série de Taylor

Nous avons vu qu'une série entière est infiniment dérivable (C^∞).
On pourrait espérer qu'une fonction C^∞ se développe en série :

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.
La ***série de Taylor*** de $f\colon I \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ est définie par

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

⚠ Le rayon de convergence de T n'est pas forcément > 0.
On devrait donc parler prudamment de la série ***formelle*** de Taylor.

⚠ Même si $T(x)$ converge, la limite n'est pas forcément $f(x)$.

Exemple (une fonction remarquable)

La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
est infiniment dérivable et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k. Ainsi $T = 0$.

Une fonction remarquable

Proposition

La fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \le 0, \\ e^{-1/x^2} & \textit{si } x > 0, \end{cases}$ *est infiniment dérivable et*

$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \le 0, \\ p_k(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} & \textit{si } x > 0, \end{cases}$ *pour un certain polynôme* p_k*.*

Démonstration. L'énoncé est vrai pour $f = f^{(0)}$ où $p_0 = 1$.

Supposons l'hypothèse vraie pour $f^{(k)}$.
Alors $f^{(k)}$ est continue : pour $x \to 0$ on a $f(x) \to 0$.
Sur $\mathbb{R}_{>0}$ la fonction $f^{(k)}$ est dérivable avec pour dérivée

$$f^{(k+1)}(x) = \left[-\tfrac{1}{x^2}p_k'(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{2}{x^3}p_k(\tfrac{1}{x})\right] e^{-1/x^2} = p_{k+1}(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2}.$$

Sur $\mathbb{R}_{<0}$ on a $f^{(k+1)}(x) = 0$. En 0 on trouve la dérivée

$$\tfrac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x} = \tfrac{1}{x}p_k(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2} \to 0 \quad \text{pour } x \to 0,$$

donc $f^{(k+1)}(0) = 0$. On conclut par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Fonctions développables en série

Définition

On dit qu'une fonction f est ***développable en série*** ou ***analytique*** en x_0 si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$ et $\rho > 0$.

Remarque

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$, alors $f \in C^\infty$ et $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Ainsi $f(x) = T(x)$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$.

Remarque

Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, càd infiniment dérivable.
D'après Taylor–Lagrange on a toujours $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ où
$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ et $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.
Ainsi $f(x) = T(x)$ si et seulement si $R_n(x) \to 0$ pour $n \to \infty$.

Remarque : Si une fonction réelle est analytique, alors elle s'étend (localement) en une fonction complexe définie par la même série.

Opérations sur les développements en séries

Théorème

Soient $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *et* $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$ *deux développements en séries sur* $B(x_0, \rho)$.

Alors les fonctions suivantes sont développables en séries :

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x - x_0)^k \qquad \textit{sur } B(x_0, \rho),$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \Big)(x - x_0)^k \qquad \textit{sur } B(x_0, \rho).$$

Supposons en plus que $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z - x_0| < \rho$. *Alors* $\frac{1}{f}$ *est développable en série sur* $B(x_0, \rho)$.

Exemple : $f(x) = 1 + x^2$ est développable en série (sur tout $\mathbb{R}$).
On a $f(z) \neq 0$ pour $|z| < 1$, mais $f(z) = 0$ pour $z = \pm i$ (dans $\mathbb{C}$!).
Ceci explique pourquoi la série $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ a $\rho = 1$ pour rayon de convergence (et non $\rho = \infty$).

Exemples de calcul avec des séries

Exemple (formules d'Euler)

On a déjà vu que $\exp$ est développable en série :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Les formules d'Euler donnent les développements bien connus :

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il en est de même pour

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

C Composition de séries

Lemme (composition de séries formelles)

Soit $F = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X^j$ *une série formelle vérifiant* $F(0) = 0$*.*
Alors la puissance F^k *n'a pas de termes de degré* $< k$*.*
Pour toute série formelle $G = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Y^k$ *on peut ainsi définir*

$$G \circ F := \sum_{k=0}^{\infty} b_k F^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell X^\ell.$$

À noter que pour chaque c_ℓ *la somme est finie.* □

Théorème (composition de séries entières)

Si f *est analytique en* x_0 *et si* g *est analytique en* $y_0 = f(x_0)$*,*
alors leur composée $g \circ f$ *est analytique en* x_0 *:*

Soit $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ *sur* $B(x_0, \rho)$
et soit $g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (y - y_0)^k$ *sur* $B(y_0, \eta)$*.*
Supposons en plus que $f(B(x_0, \rho)) \subset B(y_0, \eta)$*.*
Alors $g(f(x)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell (x - x_0)^\ell$ *sur* $B(x_0, \rho)$*.* □

C Exemple de composition de séries formelles

Composons $F=\log(1+X)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}X^j$ et $G=\exp(Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Y^k$. Les puissances de F sont

$$\begin{array}{rclllllll}
F & = & X & -\frac{1}{2}X^2 & +\frac{1}{3}X^3 & -\frac{1}{4}X^4 & +\frac{1}{5}X^5 & +\dots \\
F^2 & = & & X^2 & -X^3 & +\frac{11}{12}X^4 & -\frac{5}{6}X^5 & +\dots \\
F^3 & = & & & X^3 & -\frac{3}{2}X^4 & +\frac{7}{4}X^5 & +\dots \\
F^4 & = & & & & X^4 & -2X^5 & +\dots \\
F^5 & = & & & & & X^5 & +\dots
\end{array}$$

Explicitons ensuite les termes $\frac{1}{k!}F^k$:

$$\begin{array}{rclllllll}
F & = & X & -\frac{1}{2!}X^2 & +\frac{2}{3!}X^3 & -\frac{6}{4!}X^4 & +\frac{24}{5!}X^5 & +\dots \\
\frac{1}{2!}F^2 & = & & +\frac{1}{2!}X^2 & -\frac{3}{3!}X^3 & +\frac{11}{4!}X^4 & -\frac{50}{5!}X^5 & +\dots \\
\frac{1}{3!}F^3 & = & & & +\frac{1}{3!}X^3 & -\frac{6}{4!}X^4 & +\frac{35}{5!}X^5 & +\dots \\
\frac{1}{4!}F^4 & = & & & & +\frac{1}{4!}X^4 & -\frac{10}{5!}X^5 & +\dots \\
\frac{1}{5!}F^5 & = & & & & & +\frac{1}{5!}X^5 & +\dots
\end{array}$$

Pour la composée $G\circ F=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^k$ on trouve ainsi

$$G\circ F=1+F+\frac{1}{2!}F^2+\frac{1}{3!}F^3+\frac{1}{4!}F^4+\frac{1}{5!}F^5+\cdots=1+X.$$

C Exemple de composition de séries entières

Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série entière, $\rho_f > 0$.

On se propose de développer $\frac{1}{f(z)}$ en série en 0.

D'abord il faut que $f(0) \neq 0$. Cette condition est aussi suffisante :

On a $f(z) = a_0 + g(z)$ tel que $a_0 \neq 0$ et $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + g(z)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{g(z)}{a_0}\right)} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{g(z)}{a_0}\right)^k .$$

Cette série converge si $|g(z)| < |a_0|$, ce qui assure $f(z) \neq 0$.

Corollaire

Soit f une fonction développable en série en z_0.
Si $f(z_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série en z_0. □

$\boxed{\text{C}}$ Exemple de composition de séries entières

Exemple

La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

n'est pas analytique en $x_0 = 0$ mais elle l'est en tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En $x_0 < 0$ on trouve la série de Taylor $T = 0$, donc $T \neq f$.

En $x_0 > 0$ on peut développer $h(x) = \frac{1}{x}$ en la série

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}\left(1 - \frac{x_0 - x}{x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_0 - x}{x_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x_0^{k+1}}(x - x_0)^k.$$

Elle converge pour tout $x \in B(x_0, |x_0|)$, évitant justement $x = 0$.

La fonction $g(y) = e^{-y^2}$ est aussi développable en série :

$$e^{-y^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-y^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}y^{2k} \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

La composée $g(h(x)) = \exp(-1/x^2)$ se développe en $x_0 \neq 0$ en la série composée, qui converge pour tout $x \in B(x_0, |x_0|)$.

Fonctions usuelles développées en séries (1/2)

Nous venons d'établir les développements suivants :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}, \qquad |z| < 1$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

Exercice

Pour entraînement, déduire de ces séries que $\exp'(z) = \exp(z)$ et $\ln'(1+z) = \frac{1}{1+z}$ ainsi que $\sin'(z) = \cos(z)$ et $\cos'(z) = -\sin(z)$, puis la formule d'Euler $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.

Fonctions usuelles développées en séries (2/2)

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |z| < 1$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \qquad |z| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ici $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha-j+1}{j}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on trouve un polynôme (rayon de convergence $= \infty$).

Retour sur l'implémentation de $\exp(x)$

Objectif : On veut approcher $\exp(x)$ à $\varepsilon = 10^{-20}$ près où $x \in [0, 1]$.

Approximation : On sait que $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Or, sur ordinateur on ne peut calculer qu'un nombre fini de termes !

Si l'on prend $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ il reste à majorer $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Lemme : On a $R_n(x) \le 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $|x| \le 1 + n/2$.
(C'est un peu mieux que l'estimation selon Taylor–Lagrange.)

Preuve : On compare avec la série géométrique :

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\
&\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Pour $x \in [0, 1]$ le choix $n = 21$ assure que $|R_n(x)| \le 10^{-20}$.

⚠ Pour $|x|$ (très) grand il faut choisir n (très) grand.
Il vaut mieux éviter ce problème et réduire l'argument ! (voir plus haut)

Exemple : implémentation de $\ln(x)$

Objectif :
On veut approcher $\ln(1+x)$ où $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ à $\varepsilon = 10^{-20}$ près.

Approximation :
On sait que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ pour tout $x \in \,]-1, +1[$.
Sur ordinateur on ne peut calculer qu'un nombre fini de termes !
Considérons donc $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Majoration du reste : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.
Pour $|x| \le \frac{1}{2}$ on peut comparer avec la série géométrique :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{-n}.$$

Pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ le choix $n = 67$ assure que $|R_n(x)| \le 10^{-20}$.

Proche des bords la convergence devient de plus en plus lente.

Dans l'extrémité $x = 1$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (vers $\ln 2$),
mais seulement ***très lentement !*** Trop lentement pour être profitable.

Exemple : implémentation de $\ln(x)$ (suite)

On a intérêt à choisir, si possible, une série qui converge rapidement !

Personne ne nous oblige de calculer $\ln(1+x)$ par $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$.

Astuce : Pour $|t| < 1$ nous avons

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= +t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^5}{6} + \dots \\ \ln(1-t) &= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^5}{6} - \dots \\ \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) &= \ln(1+t) - \ln(1-t) = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots\right) \end{aligned}$$

Cette série converge, comme la série géométrique, pour $|t| < 1$.

Par exemple pour $t = \frac{1}{3}$ on obtient $\frac{1+t}{1-t} = 2$, et la série $\ln 2 = \frac{2}{1\cdot 3^1} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \dots$ converge assez rapidement.

Avec $t \in [0, \frac{1}{3}]$ on peut ainsi calculer $\ln(x)$ pour tout $x \in [1, 2]$.

Réduction de l'argument : On se ramène à l'intervalle $x \in [1, 2]$.

- Pour $x \in [1, 2]$ le calcul de $\ln(x)$ est facile, avec notre astuce.
- Pour $x > 2$ on applique la formule $\ln(x) = \ln(x/2^k) + k\ln(2)$.
- Pour $0 < x < 1$ on applique la formule $\ln(x) = -\ln(\frac{1}{x})$.

Exemple : fonctions de Bessel

Objectif : Les fonctions de Bessel apparaissent en physique comme solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \qquad \text{pour } m \in \mathbb{Z} \text{ fixé.}$$

Comment calculer concrètement ces fonctions ?

Développement en série formelle :
Cherchons une solution en série formelle $Y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_kX^k + \sum_{k=0}^{\infty} ka_kX^k + \sum_{k=0}^{\infty}(X^2 - m^2)a_kX^k = 0$$

soit encore

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k^2 - m^2 + X^2)a_kX^k = 0$$

Calcul récursif des coefficients :
Prenons le cas $m = 0$ pour simplifier. On a alors

$$a_1X^1 + [2^2a_2 + a_0]X^2 + [3^2a_3 + a_1]X^3 + [4^2a_4 + a_2]X^4 + \cdots = 0$$

Ceci laisse le choix de $a_0 \in \mathbb{R}$ mais impose $a_1 = 0$, puis

$$a_k = -\tfrac{1}{k^2}a_{k-2} \qquad \text{pour tout } k \geq 2.$$

On trouve ainsi $a_{2j+1} = 0$ et $a_{2j} = (-1)^j \frac{a_0}{4^j (j!)^2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Exemple : fonctions de Bessel (suite)

Rayon de convergence : $\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Par construction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$, est analytique.

On a ainsi trouvé une solution de l'équation différentielle de départ :

$$g(x) = x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x)$$

est analytique sur $\mathbb{R}$ et donnée par la série 0, donc $g = 0$.

Implémentation sur ordinateur :
Notre série converge à peu près aussi rapidement que $\sin(x)$.
On peut donc facilement calculer une valeur approchée :

- On fixe un intervalle $[a, b]$ et un écart toléré $\varepsilon > 0$.
- On détermine n tel que le reste $R_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$ satisfasse $|R_n(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$.
- On approche la fonction $f(x)$ par le polynôme $\sum_{j=0}^{n} a_{2j} x^{2j}$.
  Pour $x \in [a, b]$ on garantit ainsi un erreur absolue $< \varepsilon$.

Observons aussi que $|a_{2j} x^{2j}| < |a_{2j-2} x^{2j-2}|$ si $j > |x|$.
Notre série satisfait donc au critère de Leibniz pour $j > |x|$.