

Mathématiques assistées par ordinateur

Chapitre 4 : Racines des polynômes réels et complexes

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009
www-fourier.ujf-grenoble.fr/eiserm/cours_#mao
Document mis à jour le 6 juillet 2009



1/28

Objectifs de ce chapitre

On sait résoudre les équations polynomiales de degré 2, 3, 4 avec les quatre opérations $+$, $-$, $*$, $/$ et les racines $\sqrt[n]{}$ et $\sqrt[n]{}$.
En degré ≥ 5 ceci n'est plus possible.

Le théorème de Gauss-d'Alembert assure au moins l'existence des racines dans le corps des nombres complexes. Ce chapitre présente des méthodes pour effectivement localiser ces racines :

- Les règles de Descartes et de Budan-Fourier.
- La méthode de Sturm pour localiser les racines réelles.
- La méthode de Cauchy pour localiser les racines complexes.

2/28

Sommaire

- 1 Équations polynomiales et existence des racines
 - Équations polynomiales : degré ≤ 4 vs degré ≥ 5
 - Racines rationnelles : recherche exhaustive
 - Localisation grossière des racines : la borne de Cauchy
- 2 Localisation effective des racines réelles et complexes
 - Les règles de Descartes et de Budan-Fourier
 - Racines réelles : indice de Cauchy et suites de Sturm
 - Racines complexes : localisation dans le plan complexe

3/28 11.1

Équations polynomiales

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : Pour l'équation $x + a_0 = 0$ on trouve la solution $x = -a_0$.

Degré 2 : Pour $x^2 + px + q = 0$ on trouve

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \\ \Leftrightarrow & x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

⚠ Pour toujours assurer l'existence des racines il faut passer aux nombres complexes. Par exemple, pour $x^2 + 1 = 0$ on trouve $x = \pm i$.

4/28

La formule de Tartaglia–Cardano

En degré 3 on cherche à résoudre

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

D'abord on substitue $x = y - a/3$ pour éliminer le terme quadratique :

$$y^3 + py + q = 0.$$

Après un petit calcul on trouve $p = b - \frac{a^2}{3}$ et $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$.

Ensuite on remplace $y = z - p/3z$ et multiplie toute l'équation par z^3 :

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

C'est une équation quadratique en z^3 ! On en déduit que

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ceci permet de calculer z^3 puis z , puis y , et finalement x .

⚠ Programmer cette méthode sur ordinateur est un défi non trivial : pour les diverses racines il faut choisir / déterminer les bons signes !

§1.1

§28

Existence des racines

On veut résoudre une équation polynomiale (réelle ou complexe)

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

Degré 1 : on trouve $x = -a_0$.

Degré 2 : on trouve $x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$.

Degré 3 : formule de Tartaglia (1530), publiée par Cardano (1545)

Degré 4 : formule de Ferrari (1540), un élève de Cardano

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1824, Galois 1832)

En degré ≥ 5 aucune formule générale de ce type n'existe, construite à partir des opérations $+$, $-$, $*$, $/$, et des radicaux $\sqrt[n]{}$.

On ne dispose donc pas de formule « magique » en degré supérieur. Peut-on néanmoins être sûr que des solutions existent ? dans \mathbb{C} ?

Théorème (de Gauss–d'Alembert)

Pour tout polynôme $F = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ dans $\mathbb{C}[X]$ il existe $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ tels que $F = (X - r_1)(X - r_2) \dots (X - r_n)$.

§28

Racines rationnelles d'un polynôme rationnel

Considérons $P = \frac{a_n}{b_n}X^n + \dots + \frac{a_1}{b_1}X + \frac{a_0}{b_0}$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Quitte à multiplier par $\text{ppcm}(b_0, \dots, b_n)$ on peut supposer $P \in \mathbb{Z}[X]$.

Proposition

Considérons $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ dans $\mathbb{Z}[X]$.

Si $P(\frac{p}{q}) = 0$ où $\text{pgcd}(p, q) = 1$, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

Si $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$, il n'existe qu'un nombre fini de candidats $\frac{p}{q}$.

Démonstration. Nous avons

$$q^n P(\frac{p}{q}) = a_0q^n + a_1q^{n-1}p + \dots + a_{n-1}q^1p^{n-1} + a_np^n.$$

Si $P(\frac{p}{q}) = 0$, alors $p \mid a_0q^n$ et $q \mid a_np^n$.

Puisque $\text{pgcd}(p, q) = 1$, on a $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$. □

Corollaire

En testant tous les candidats, ceci permet de trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme rationnel donné. □

Exercice

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $\sqrt[n]{a}$ est rationnel.

§1.2

§28

Localisation grossière : la borne de Cauchy

Définition (borne de Cauchy)

Soit $F = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On pose $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$ et $\rho_F := 1 + M$.

Théorème (localisation grossière des racines)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq \rho_F$ on a $|F(z)| \geq 1$. Par conséquent, toute racine complexe de F est dans $B(\rho_F) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho_F\}$.

Démonstration. L'énoncé est vrai pour $F = X^n$: ici $M = 0$ et $\rho_F = 1$. Supposons donc $M > 0$ et $\rho_F > 1$. Pour $|z| \geq \rho_F$ on trouve

$$\begin{aligned} |F(z) - z^n| &= |c_0 + \dots + c_{n-1}z^{n-1}| \leq |c_0| + \dots + |c_{n-1}||z|^{n-1} \\ &\leq M + M|z| + \dots + M|z|^{n-1} = M \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \leq |z|^n - 1. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

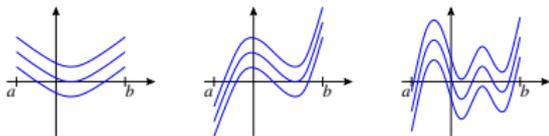
$$\begin{aligned} |z^n| &= |z^n - F(z) + F(z)| \leq |z^n - F(z)| + |F(z)|, \quad \text{d'où} \\ |F(z)| &\geq |z^n| - |F(z) - z^n| \geq |z|^n - (|z|^n - 1) = 1. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $|z| \geq \rho_F$ implique $|F(z)| \geq 1$. □

§28

Racines réelles d'un polynôme réel

Objectif : Comment déterminer/majorer le nombre de racines d'un polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X]$ dans un intervalle donné $[a, b]$?



Si $P(a)P(b) < 0$ il y en a 1 ou 3 ou 5 ... (comptées avec multiplicité).
Si $P(a)P(b) > 0$ il y en a 0 ou 2 ou 4 ... (comptées avec multiplicité).
Comment déterminer ce nombre plus précisément ?

- La règle de Budan–Fourier et la règle de Descartes donnent des majorations à l'aide des dérivées $P, P', \dots, P^{(n)}$ en a et b .

Ces règles sont faciles à appliquer mais restent approximatives.

- La méthode de Sturm calcule le nombre exact à l'aide de l'algorithme d'Euclide (divisions euclidiennes itérées).

C'est un résultat élémentaire, élégant, et époustouffant !

§2.1

§2.1

Variation de signes : définition

$$\begin{aligned} V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\ V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\ V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Définition (changements de signes, zéros inclus)

Pour une suite (s_0, \dots, s_n) d'éléments dans \mathbb{R} nous posons

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Pour une suite (S_0, \dots, S_n) de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ nous posons

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Pour la différence en $a, b \in \mathbb{R}$ nous écrivons $V_a^b := V_a - V_b$.

Définition (changements de signes, zéros exclus)

On forme d'abord la suite réduite \hat{s} en supprimant les éléments nuls, puis on définit $\hat{V}(s) := V(\hat{s})$. De même pour \hat{V}_a et $\hat{V}_a^b = \hat{V}_a - \hat{V}_b$.

§2.8

Les règles de Descartes et de Budan–Fourier

Comment déterminer le nombre de racines de $P \in \mathbb{R}[X]$ dans $[a, b]$?
La règle de Descartes majore le nombre des racines positives :

Théorème (règle de Descartes)

Pour tout polynôme $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ dans $\mathbb{R}[X]^+$ on a

$$\# \left\{ x \in \mathbb{R}_{>0} \mid P(x) = 0 \right\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

Pour les racines négatives on passe de $P(X)$ à $P(-X)$.

Budan et Fourier étendirent cette majoration à tout intervalle réel :

Théorème (règle de Budan–Fourier)

Pour tout polynôme $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ dans $\mathbb{R}[X]^+$ on a

$$\# \left\{ x \in [a, b] \mid P(x) = 0 \right\} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

On a égalité pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ssi P a n racines dans \mathbb{R} .

Avantage : Cette majoration est facile à calculer.

Inconvénient : Elle surestime souvent le nombre de racines.

C'était l'état de l'art avant la découverte de Sturm en 1829.

§2.1

§2.1

Variation de signes : dérivées d'un polynôme

On considère un polynôme de degré n et ses dérivées :

$$\begin{aligned} P &= P^{(0)} = a_nX^n + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \\ P' &= P^{(1)} = na_nX^{n-1} + \dots + 2a_2X + a_1 \\ P'' &= P^{(2)} = n(n-1)a_nX^{n-2} + \dots + 2a_2 \\ &\dots \\ P^{(n)} &= n!a_n \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $v(x) := \hat{V}(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$
la variation des signes dans la suite $P, P', \dots, P^{(n)}$ évaluée en x .

Pour $x \rightarrow +\infty$ on trouve $v(x) = 0$ car

$$\text{sign } P^{(k)}(x) = \text{sign dom } P^{(k)} = \text{sign } a_n.$$

Pour $x \rightarrow -\infty$ on trouve $v(x) = n$ car

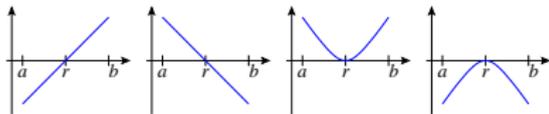
$$\text{sign } P^{(k)}(x) = (-1)^{n-k} \text{sign dom } P^{(k)} = (-1)^{n-k} \text{sign } a_n.$$

Notre objectif sera d'étudier le comportement de $v(x)$ au milieu.

§2.8

Variation de signes : racines de P

Nous souhaitons comprendre $v(x)$ lors du passage d'une racine.



Pour une racine simple de P on trouve $v(a) - v(b) = 1$:

soit $(-, +, \dots) \rightarrow (0, +, \dots) \rightarrow (+, +, \dots)$,

soit $(+, -, \dots) \rightarrow (0, -, \dots) \rightarrow (-, -, \dots)$.

Pour une racine double de P on trouve $v(a) - v(b) = 2$:

soit $(+, -, +, \dots) \rightarrow (0, 0, +, \dots) \rightarrow (+, +, +, \dots)$,

soit $(-, +, -, \dots) \rightarrow (0, 0, -, \dots) \rightarrow (-, -, -, \dots)$.

Lors du passage d'une racine de multiplicité m la suite $(P, P', \dots, P^{(n)})$ perd m variations de signe :

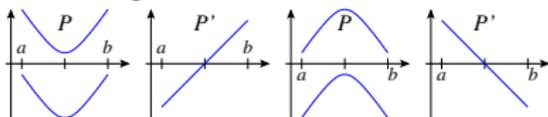
Observation (passage d'une racine de P de multiplicité m)

Si $P(r) = P'(r) = \dots = P^{(m-1)}(r) = 0$ sont les seules racines de $P, P', \dots, P^{(n)}$ sur $]a, b[$, alors $v(a) - v(b) = m$. \square

12.1

12.2

Variation de signes : racines de $P^{(k)}$



Lors du passage d'une racine simple de P' on a $v(a) - v(b) = 0$ ou 2 :

soit $(+, -, +, \dots) \rightarrow (+, 0, +, \dots) \rightarrow (+, +, +, \dots)$, $v(a) - v(b) = 2$,

soit $(-, -, +, \dots) \rightarrow (-, 0, +, \dots) \rightarrow (-, +, +, \dots)$, $v(a) - v(b) = 0$,

soit $(+, +, -, \dots) \rightarrow (+, 0, -, \dots) \rightarrow (+, -, -, \dots)$, $v(a) - v(b) = 0$,

soit $(-, +, -, \dots) \rightarrow (-, 0, -, \dots) \rightarrow (-, -, -, \dots)$, $v(a) - v(b) = 2$.

Pour une racine double de P' on trouve $v(a) - v(b) = 2$:

soit $(*, +, -, +, \dots) \rightarrow (*, 0, +, \dots) \rightarrow (*, +, +, +, \dots)$,

soit $(*, -, +, -, \dots) \rightarrow (*, 0, 0, -, \dots) \rightarrow (*, -, -, -, \dots)$.

Observation (passage d'une racine de $P^{(k)}$ pour $k \geq 1$)

Supposons que $k \geq 1$ et que $P^{(k)}(r) = \dots = P^{(k+m-1)}(r) = 0$

sont les seules racines de $P, P', \dots, P^{(n)}$ sur $]a, b[$. Alors on trouve

$v(a) - v(b) = m$ pour m pair, et $v(a) - v(b) = m \pm 1$ pour m impair. \square

14.28

La règle de Budan–Fourier : démonstration

Théorème (Budan 1807, Fourier 1820)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $m(a, b)$ le nombre des racines dans $]a, b[$, comptées avec multiplicités. Alors on a $m(a, b) \leq v(a) - v(b)$.

Plus précisément, on a $m(a, b) = v(a) - v(b) - 2u$ où $u \in \mathbb{N}$.

On a l'égalité $m(a, b) = v(a) - v(b)$ pour tout $a < b$ dans \mathbb{R}

si et seulement si P est de degré n et admet n racines réelles.

Démonstration.

On a déjà observé que $v(a) - v(b) = m(a, b) + 2u$.

On a donc $m(a, b) = v(a) - v(b) - 2u \leq v(a) - v(b)$.

Choisissons $]a_0, b_0[$ contenant les racines réelles de $P, P', \dots, P^{(n)}$.

Alors $v(a) = n$ pour tout $a \leq a_0$ et $v(b) = 0$ pour tout $b \geq b_0$.

Si $m(a, b) < v(a) - v(b)$ sur un intervalle $]a, b[$, alors

$$m(a_0, b_0) = m(a_0, a) + m(a, b) + m(b, b_0)$$

$$< (v(a_0) - v(a)) + (v(a) - v(b)) + (v(b) + v(b_0)) = n.$$

Par contraposé, si $m(a_0, b_0) = n$, alors $m(a, b) = v(a) - v(b)$. \square

12.1

15.28

La règle de Descartes : démonstration

Corollaire (règle de Descartes, 1637)

Soit $P = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_nX^n$ un polynôme réel.

Alors P admet au plus $V(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ racines positives, et au plus $V(+c_0, -c_1, +c_2, \dots, (-1)^n c_n)$ racines négatives.

S'il y en a moins, le défaut est un nombre pair.

Démonstration. On applique le théorème de Budan–Fourier :

■ Pour $a = 0$ on a $v(0) = V(c_0, c_1, \dots, c_n)$.

■ Pour $b > 0$ assez grand on a $v(b) = 0$.

Ainsi $m(a, b) \leq v(a) - v(b) = V(c_0, c_1, \dots, c_n)$.

Pour les racines négatives on considère $P(-X)$. \square

Exemple

$P(X) = -1 - X + X^2 + X^3$ admet exactement une racine positive.

$P(-X) = -1 + X - X^2 - X^3$ admet 2 ou 0 racines positives.

Effectivement, on trouve la factorisation $P = (X - 1)(X + 1)^2$.

16.28

Le théorème de Sturm : énoncé

Théorème (Sturm 1829)

Pour tout polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X]^*$ et tout intervalle $[a, b]$ nous avons

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

D'éventuelles racines sur le bord $\{a, b\}$ comptent pour un demi.

Ici la suite S_0, S_1, \dots, S_n est construite de $S_0 = P$ et $S_1 = P'$ par division euclidienne $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$ jusqu'à ce que $S_{n+1} = 0$.

Ainsi $S_n \sim \text{pgcd}(P, P')$ comme dans l'algorithme d'Euclide (ici signé). Si S_n n'est pas constant, il faut encore diviser S_0, S_1, \dots, S_n par S_n .

Corollaire

Ce théorème permet de compter puis de localiser toutes les racines réelles : On commence par la borne de Cauchy puis on subdivise...



j2.2

17/28 j2.2

Le théorème de Sturm : exemples

Algorithme de Sturm : $S_0 := P$, $S_1 := P'$, $S_{k+1} = -(S_{k-1} \text{ rem } S_k)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 1 = S_0$	-44	-15	-2	+1	0	+1	+10
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 1 = S_2$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{25}{9}$	$-\frac{17}{9}$	-1	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{5}{3}$
$\frac{45}{64} = S_3$	$+\frac{45}{64}$						
V	3	3	3	2	$\frac{3}{2}$	0	0

Dans cet exemple les racines sont 1 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$X^3 - 2X^2 + 2 = S_0$	-43	-14	-1	+2	+1	+2	+11
$3X^2 - 4X = S_1$	+39	+20	+7	0	-1	+4	+15
$\frac{8}{9}X - 2 = S_2$	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{34}{9}$	$-\frac{26}{9}$	-2	$-\frac{10}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{5}{3}$
$-\frac{99}{16} = S_3$	$-\frac{99}{16}$						
V	2	2	2	1	1	1	1

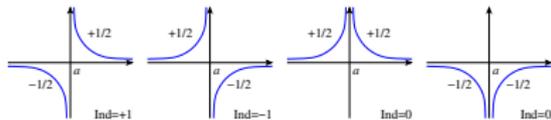
Dans cet exemple il n'existe qu'une seule racine réelle, $r \approx -0.84$.

18/28

Pôles d'une fonction rationnelle

Soit $f = \frac{Q}{P} \in \mathbb{R}(X)^*$ une fraction rationnelle où $\text{pgcd}(Q, P) = 1$.

On compte les pôles de f selon la convention suivante :



Définition (indice de Cauchy en un point)

Pour $f \in \mathbb{R}(X)^*$ et $a \in \mathbb{R}$ on pose

$$\text{Ind}_a(f) := \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_a^-(f) \quad \text{où}$$

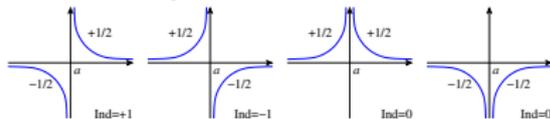
$$\text{Ind}_a^{\pm}(f) := \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{si } \lim_a^{\pm} f = +\infty, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } \lim_a^{\pm} f = -\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, on a $\text{Ind}_0(\frac{1}{x}) = 1$ et $\text{Ind}_0(-\frac{1}{x}) = -1$ et $\text{Ind}_0(\frac{1}{x^2}) = 0$.

j2.2

18/28 j2.2

L'indice de Cauchy : définition



Définition (indice de Cauchy sur un intervalle)

Pour $a < b$ dans \mathbb{R} nous posons

$$\text{Ind}_a^b(f) := \sum_{x \in]a, b[} \text{Ind}_x(f) + \text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_b^-(f).$$

Pour $b < a$ on pose $\text{Ind}_a^b(f) := -\text{Ind}_b^a(f)$, et finalement $\text{Ind}_a^a(f) := 0$.

Remarque

L'indice de Cauchy jouit des propriétés semblables à l'intégrale :

- $\text{Ind}_a^b(f) + \text{Ind}_b^c(f) = \text{Ind}_a^c(f)$ pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- $\text{Ind}_a^b(f \circ \tau) = \text{Ind}_a^b(f)$ pour toute fonction affine $\tau(x) = px + q$.

20/28

L'indice de Cauchy compte les racines réelles

Proposition (dérivée logarithmique)

$$\text{Pour } f \in \mathbb{R}(X)^* \text{ on a } \text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{si } a \text{ est une racine de } f, \\ -1 & \text{si } a \text{ est un pôle de } f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On factorise $f = (X - a)^m g$ tel que $g(a) \in \mathbb{R}^*$.

On obtient $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Ainsi $\text{Ind}_a(\frac{f'}{f}) = \text{sign}(m)$. \square

Corollaire (racines réelles de polynômes réels)

L'indice $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ compte les racines de $P \in \mathbb{R}[X]^*$ dans $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b(P'/P).$$

D'éventuelles racines sur le bord $\{a, b\}$ comptent pour un demi.

Problème : Comment calculer l'indice sans connaître les pôles ?

Solution : La suite de Sturm permet de calculer $\text{Ind}_a^b(\frac{Q}{P})$.

La formule d'inversion de Cauchy

Formule d'inversion (Cauchy 1837)

Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]^*$ n'ont pas de racine commune en a ni en b , alors

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Démonstration. On peut supposer que $\text{pgcd}(P, Q) = 1$.

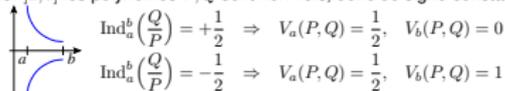
Si $[a, b]$ ne contient pas de racine de P ni de Q , alors les indices $\text{Ind}_a^b(\frac{Q}{P})$ et $\text{Ind}_a^b(\frac{P}{Q})$ sont nuls, puis le TVI assure que $V_a^b(P, Q) = 0$.

La formule est additive par rapport à bisection de l'intervalle.

Si $[a, b]$ contient des racines, on peut donc supposer que c'est a ou b .

Par symétrie nous pouvons supposer que $P(a) = 0$ et $Q(a) \neq 0$.

Sur $[a, b]$ les polynômes P, Q sont non nuls, donc de signe constant.



Dans les deux cas nous obtenons l'égalité énoncée. \square

Suites de Sturm

Définition (suite de Sturm)

Une suite (S_0, \dots, S_n) dans $\mathbb{R}[X]$ est **de Sturm** sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si $S_k(x) = 0$ pour $0 < k < n$ et $x \in [a, b]$ entraîne $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Exemple. Pour $\frac{R}{S}$ où $\text{pgcd}(R, S) = 1$ l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm commençant par $S_0 = S$ et $S_1 = R$ puis

$$S_{k+1} = S_k Q_k - S_{k-1} \quad \text{jusqu'à } S_n = \text{const.}$$

Exemple. On peut assouplir l'hypothèse : il suffit que

$$a_k S_{k+1} = S_k Q_k - b_k S_{k-1}$$

avec des constantes réelles $a_k, b_k > 0$.

Exemple. Plus généralement encore, il suffit que

$$A_k S_{k+1} = S_k Q_k - B_k S_{k-1}$$

avec des polynômes réels A_k, B_k vérifiant $A_k(x) > 0$ et $B_k(x) > 0$, puis $S_n(x) \neq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$ en question.

Le théorème de Sturm

Corollaire (de la formule d'inversion)

Si (S_0, S_1, \dots, S_n) est une suite de Sturm sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n).$$

Démonstration. La formule d'inversion est télescopique :

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Les termes au milieu s'annulent : si $S_1(x) = 0$, alors $S_0(x)S_2(x) < 0$.

Théorème (fraction continue selon l'algorithme d'Euclide)

Pour R/S où $\text{pgcd}(R, S) = 1$ l'algorithme d'Euclide signé produit une suite de Sturm $S_0 = S, S_1 = R, \dots, S_n = 1, S_{n+1} = 0$. Ainsi

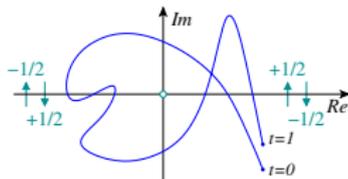
$$\text{Ind}_a^b(R/S) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

\diamond Cette formule permet de calculer l'indice de Cauchy $\text{Ind}_a^b(R/S)$.

L'indice de Cauchy compte le nombre de tours

Soient $R, S \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels et $F = R + iS$.

L'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto F(t)$, décrit un chemin dans le plan complexe, allant de $F(0)$ vers $F(1)$, à coordonnées $R(t) + iS(t)$.



Observation

L'indice $\frac{1}{2} \text{Ind}_0^1\left(\frac{R}{S}\right)$ compte le nombre de tours autour de 0 : traverser l'axe réel compte $\pm \frac{1}{2}$ selon le sens gauche / droite.

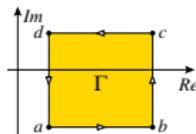
On suppose ici que le chemin $Q(t)$ ne passe pas par 0. Autrement dit, R et S n'ont pas de racine commune.

12.3

25.28

Indice de Cauchy d'un polynôme complexe

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe. Comment localiser ses racines ?



Objectif : établir une méthode effective analogue au théorème de Sturm réel.

Au lieu d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ on considère un rectangle $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

Calcul d'indice : On considère le chemin rectiligne de a vers b . Par changement de variable on pose $F = P(a + (b-a)X)$. Les parties $R = \text{Re } F$ et $S = \text{Im } F$ sont des polynômes réels. L'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto F(t)$ décrit un chemin allant de $F(0) = P(a)$ vers $F(1) = P(b)$, à coordonnées $R(t) + iS(t)$.

Définition

On pose $\text{ind}_a^b(P) := \frac{1}{2} \text{Ind}_0^1\left(\frac{R}{S}\right)$. Pour le rectangle Γ on pose $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P) := \text{ind}_a^b(P) + \text{ind}_b^c(P) + \text{ind}_c^d(P) + \text{ind}_d^a(P)$.

♦ $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P)$ se calcule aussi efficacement que dans le cas réel : Euclide pour la suite de Sturm de $\frac{R}{S}$, puis évaluation en 0 et 1.

26.28

L'indice de Cauchy compte les racines complexes

Proposition (exercice)

Pour $P = X - r$ on a $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ est à l'intérieur de } \Gamma, \\ \frac{1}{2} & \text{si } r \text{ est sur un côté de } \Gamma, \\ \frac{1}{4} & \text{si } r \text{ est un sommet de } \Gamma, \\ 0 & \text{si } r \text{ est à l'extérieur de } \Gamma. \end{cases}$

Théorème (admis)

Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ n'ont pas de racines sur les sommets de $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, alors

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(P \cdot Q) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(P) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(Q).$$

□ M. Eisermann, *The Fundamental Theorem of Algebra made effective : an elementary real-algebraic proof via Sturm chains.*

Corollaire

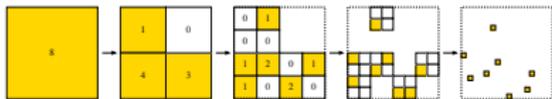
Si $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admet pas de racine sur les sommets de $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, alors $\text{ind}_{\partial\Gamma}(P)$ compte le nombre des racines de P dans Γ .

12.3

27.28

Localisation des racines complexes

Par dichotomie, l'indice de Cauchy permet de localiser toutes les racines complexes d'un polynôme complexe donné $P \in \mathbb{C}[X]$.



♦ On commence par le carré $[-\rho, +\rho]^2$ où ρ est la borne de Cauchy. Chaque carré contenant des racines est subdivisé en quatre. On ne retient que ceux d'indice > 0 , contenant des racines.

♦ On peut assurer que les racines de P sont simples, quitte à diviser par $\text{pgcd}(P, P')$. Dès qu'on a bien séparé les racines, on passe à la méthode de Newton, qui converge plus rapidement.

Conclusion

Cette méthode a le mérite d'être élémentaire et facile à implémenter. Elle est suffisamment rapide pour des polynômes de degré moyen. Pour des polynômes de grand degré il existe des algorithmes plus économes, mais plus compliqués. (Schönhage 1982, Smale 1986.)

26.28