Mathématiques assistées par ordinateur

Chapitre 7 : Approximation polynomiale

Michael Eisermann

Mat249, DLST L2S4, Année 2008-2009
www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜eiserm/cours # mao
Document mis à jour le 6 juillet 2009

INSTITUT FOURIER

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ
GRENOBLE 1

Sommaire

Sommaire

Retour sur l'interpolation de Lagrange

Théorème (interpolation de Lagrange)

Étant donnés des points distincts $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *et des valeurs arbitraires* $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$*, il existe un unique polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* $\leq n$ *vérifiant* $P(x_k) = y_k$ *pour tout* $k = 0, \ldots, n$*, à savoir*

$$P = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

Retour sur l'interpolation de Lagrange

Théorème (interpolation de Lagrange)

Étant donnés des points distincts $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *et des valeurs arbitraires* $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$*, il existe un unique polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* $\leq n$ *vérifiant* $P(x_k) = y_k$ *pour tout* $k = 0, \ldots, n$*, à savoir*

$$P = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

On l'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange donné par $x_0, \ldots, x_n$ *et* $y_0, \ldots, y_n$*, ou passant par* $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$*.* □

Différences divisées : énoncé

Le polynôme interpolateur de f en $x_0, \ldots, x_n$ peut s'écrire comme

$$P = a_0 \ + \ a_1(X - x_0) \ + \ \ldots \ + \ a_n(X - x_0)\cdots(X - x_{n-1}).$$

Différences divisées : énoncé

Le polynôme interpolateur de f en $x_0, \ldots, x_n$ peut s'écrire comme

$$P = a_0 \ + \ a_1(X - x_0) \ + \ \ldots \ + \ a_n(X - x_0) \cdots (X - x_{n-1}).$$

Cette écriture permet de l'évaluer efficacement à la Horner :

$$P(x) = a_0 + (x - x_0)\big[a_1 + \ldots (x - x_{n-2})\big[a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n\big] \ldots\big].$$

Différences divisées : énoncé

Le polynôme interpolateur de f en $x_0, \ldots, x_n$ peut s'écrire comme

$$P = a_0 \ + \ a_1(X - x_0) \ + \ \ldots \ + \ a_n(X - x_0)\cdots(X - x_{n-1}).$$

Cette écriture permet de l'évaluer efficacement à la Horner :

$$P(x) = a_0 + (x - x_0)\big[a_1 + \ldots (x - x_{n-2})\big[a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n\big]\ldots\big].$$

Mais comment calculer efficacement les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$?

Différences divisées : énoncé

Le polynôme interpolateur de f en $x_0, \ldots, x_n$ peut s'écrire comme

$$P = a_0 \ + \ a_1(X - x_0) \ + \ \ldots \ + \ a_n(X - x_0) \cdots (X - x_{n-1}).$$

Cette écriture permet de l'évaluer efficacement à la Horner :

$$P(x) = a_0 + (x - x_0)\big[a_1 + \ldots (x - x_{n-2})\big[a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n\big] \ldots\big].$$

Mais comment calculer efficacement les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$?

On observe que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Différences divisées : énoncé

Le polynôme interpolateur de f en $x_0, \ldots, x_n$ peut s'écrire comme

$$P = a_0 \ + \ a_1(X - x_0) \ + \ \ldots \ + \ a_n(X - x_0) \cdots (X - x_{n-1}).$$

Cette écriture permet de l'évaluer efficacement à la Horner :

$$P(x) = a_0 + (x - x_0)\big[a_1 + \ldots (x - x_{n-2})\big[a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n\big] \ldots\big].$$

Mais comment calculer efficacement les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$?

On observe que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Par récurrence on définit les *différences divisées* par $f[x_i] := f(x_i)$ puis

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Différences divisées : énoncé

Le polynôme interpolateur de f en $x_0, \dots, x_n$ peut s'écrire comme

$$P = a_0 \ + \ a_1(X - x_0) \ + \ \dots \ + \ a_n(X - x_0) \cdots (X - x_{n-1}).$$

Cette écriture permet de l'évaluer efficacement à la Horner :

$$P(x) = a_0 + (x - x_0)\big[a_1 + \dots (x - x_{n-2})\big[a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n\big] \dots\big].$$

Mais comment calculer efficacement les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$?

On observe que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Par récurrence on définit les *différences divisées* par $f[x_i] := f(x_i)$ puis

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Théorème

Nous avons $a_k = f[x_0, \dots, x_k]$ *pour tout* $k = 0, \dots, n$.

Différences divisées : algorithme

$$
\begin{array}{cccccccc}
\text{étape 0} & & \text{étape 1} & & \text{étape 2} & \ldots & \text{étape n} & \text{résultat} \\
f(x_0) & & & & & & & a_0 \\
f(x_1) & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_0, x_1] & & & & & a_1 \\
f(x_2) & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_1, x_2] & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_0, x_1, x_2] & & & a_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
f(x_{n-2}) & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_{n-3}, x_{n-2}] & & & & & a_{n-2} \\
f(x_{n-1}) & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] & & & a_{n-1} \\
f(x_n) & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_{n-1}, x_n] & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \stackrel{\searrow}{\rightarrow} & f[x_0, \ldots, x_n] & a_n
\end{array}
$$

Différences divisées : algorithme

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{étape 0} & & \text{étape 1} & & \text{étape 2} & \dots & \text{étape n} & \text{résultat} \\
f(x_0) & & & & & & & a_0 \\
f(x_1) & \overset{\searrow}{\to} & f[x_0,x_1] & & & & & a_1 \\
f(x_2) & \overset{\searrow}{\to} & f[x_1,x_2] & \overset{\searrow}{\to} & f[x_0,x_1,x_2] & & & a_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
f(x_{n-2}) & \overset{\searrow}{\to} & f[x_{n-3},x_{n-2}] & & & & & a_{n-2} \\
f(x_{n-1}) & \overset{\searrow}{\to} & f[x_{n-2},x_{n-1}] & \overset{\searrow}{\to} & f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}] & & & a_{n-1} \\
f(x_n) & \overset{\searrow}{\to} & f[x_{n-1},x_n] & \overset{\searrow}{\to} & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \overset{\searrow}{\to} & f[x_0,\dots,x_n] & a_n
\end{array}$$

Algorithme 2 calcul des différences divisées

Entrée: les points $x_0, \dots, x_n$ et les valeurs $y_0, \dots, y_n$ où $y_k = f(x_k)$

Sortie: les coefficients $a_0, \dots, a_n$ comme spécifiés ci-dessus

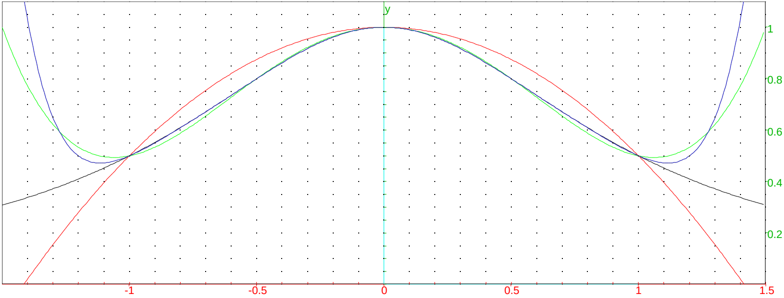
pour k **de** 0 **à** n **faire** $a_k \leftarrow y_k$ **fin pour**
pour i **de** 1 **à** n **faire**
  pour k **de** n **à** i **faire** $a_k \leftarrow \frac{a_k - a_{k-1}}{x_k - x_{k-i}}$ **fin pour**
fin pour
retourner $a_0, \dots, a_n$

Interpolation et approximation : exemple

On considère la fonction $f\colon [-1,+1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Interpolation et approximation : exemple

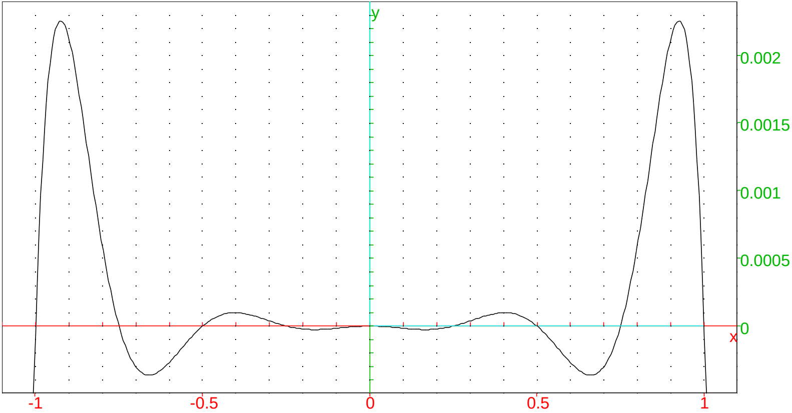
On considère la fonction $f\colon [-1,+1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
La graphique trace f (noir) ainsi que trois polynômes interpolateurs :



P_2 (rouge) interpole en $-1, 0, +1$,
P_4 (vert) interpole en $-1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1$,
P_8 (bleu) interpole en $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}, +1$.

Interpolation et approximation : exemple

Pour mieux visualiser l'écart entre f et P_8 il est beaucoup plus informatif d'afficher la différence $f - P_8$ pour pouvoir « zoomer » :



Écart entre une fonction et son polynôme interpolateur

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n + 1$ *fois dérivable.*

Écart entre une fonction et son polynôme interpolateur

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n + 1$ *fois dérivable.*
Soient $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ *des points distincts de cet intervalle.*

Écart entre une fonction et son polynôme interpolateur

Théorème

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n+1$ *fois dérivable.*
Soient $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ *des points distincts de cet intervalle.*
Soit P *le polynôme interpolateur donné par les* x_k *et* $y_k = f(x_k)$*.*

Écart entre une fonction et son polynôme interpolateur

Théorème

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n+1$ *fois dérivable.*
Soient $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ *des points distincts de cet intervalle.*
Soit P *le polynôme interpolateur donné par les* x_k *et* $y_k = f(x_k)$*.*
Pour tout $x \in [a,b]$ *il existe* $\xi \in [a,b]$ *(qui dépend de* x*) tel que :*

$$f(x) - P(x) \quad = \quad \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Application aux points équidistants

Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n + 1$ *fois dérivable.*

Application aux points équidistants

Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n + 1$ *fois dérivable. Soit* P *le polynôme interpolateur de* f *en les* $n + 1$ *points équidistants* $x_k = a + kh$ *où* $h = \frac{b-a}{n}$ *et* $k = 0, \ldots, n$*.*

Application aux points équidistants

Corollaire

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n+1$ *fois dérivable. Soit* P *le polynôme interpolateur de* f *en les* $n+1$ *points équidistants* $x_k = a + kh$ *où* $h = \frac{b-a}{n}$ *et* $k = 0, \ldots, n$. *Alors pour* $x \in [a,b]$ *on a*

$$\left|f(x) - P(x)\right| \quad \leq \quad \frac{h^{n+1}}{n+1} \cdot \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right|.$$

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent.
Considérons une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent. Considérons une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Le polynôme de Taylor $T_n \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent. Considérons une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Le polynôme de Taylor $T_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. On a la majoration d'erreur

$$\bigl|f(x) - T_n(x)\bigr| \le \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \bigl|f^{(n+1)}\bigr| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \bigl|f^{(n+1)}\bigr|.$$

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent.
Considérons une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Le polynôme de Taylor $T_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. On a la majoration d'erreur

$$\bigl|f(x) - T_n(x)\bigr| \le \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \bigl|f^{(n+1)}\bigr| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \bigl|f^{(n+1)}\bigr|.$$

⚠ Cette majoration ne dit pas que $|f(x) - T_n(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$, car $|f^{(n+1)}|$ peut exploser : problème du rayon de convergence !

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent. Considérons une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Le polynôme de Taylor $T_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. On a la majoration d'erreur

$$\big|f(x) - T_n(x)\big| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big|.$$

⚠ Cette majoration ne dit pas que $|f(x) - T_n(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$, car $|f^{(n+1)}|$ peut exploser : problème du rayon de convergence !

Le polynôme de Lagrange $L_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent.
Considérons une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Le polynôme de Taylor $T_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. On a la majoration d'erreur

$$\left|f(x) - T_n(x)\right| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right|.$$

⚠ Cette majoration ne dit pas que $|f(x) - T_n(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$, car $|f^{(n+1)}|$ peut exploser : problème du rayon de convergence !

Le polynôme de Lagrange $L_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. On a la majoration d'erreur

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{\prod_{k=0}^{n} |x-x_k|}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right|.$$

Comparaison entre Taylor et Lagrange

Les approximations de Taylor et de Lagrange se ressemblent.
Considérons une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

Le polynôme de Taylor $T_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. On a la majoration d'erreur

$$\big|f(x) - T_n(x)\big| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big|.$$

⚠ Cette majoration ne dit pas que $|f(x) - T_n(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$, car $|f^{(n+1)}|$ peut exploser : problème du rayon de convergence !

Le polynôme de Lagrange $L_n \in \mathbb{R}[X]_{\le n}$ est construit pour coïncider avec les valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. On a la majoration d'erreur

$$\big|f(x) - L_n(x)\big| \le \frac{\prod_{k=0}^{n} |x-x_k|}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big|.$$

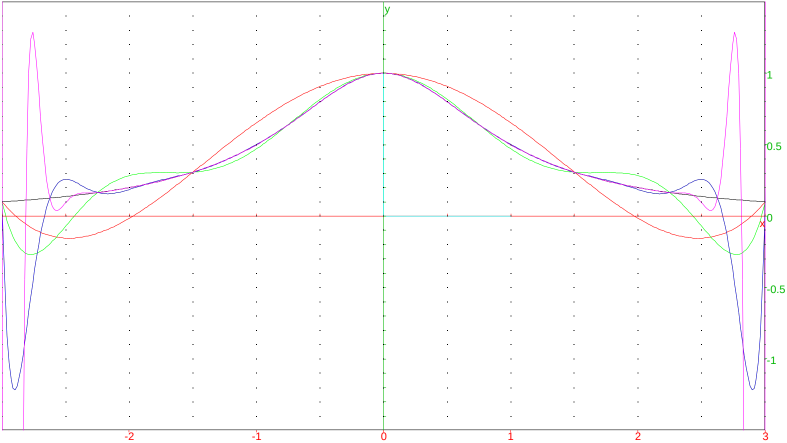
⚠ Cette majoration ne dit pas que $|f(x) - L_n(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$, car $|f^{(n+1)}|$ peut exploser : phénomène de Runge !

Avertissement : phénomène de Runge

On considère $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

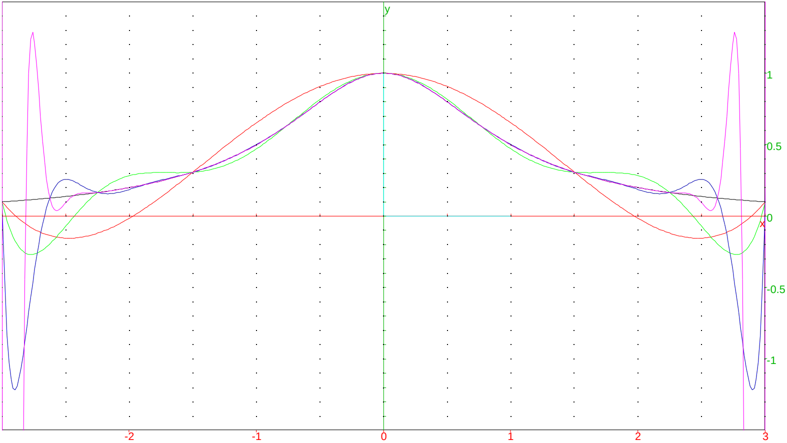
Avertissement : phénomène de Runge

On considère $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. La graphique montre f et ses polynômes de Lagrange d'ordre 4, 8, 16, 32 à points équidistants.



Avertissement : phénomène de Runge

On considère $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. La graphique montre f et ses polynômes de Lagrange d'ordre 4, 8, 16, 32 à points équidistants.



Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème (Weierstrass 1885)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle compact.*

Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème (Weierstrass 1885)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle compact. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un polynôme* P *tel que* $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in [a,b]$.

Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème (Weierstrass 1885)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle compact. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un polynôme* P *tel que* $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in [a,b]$*. Autrement dit, on assure que* $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$*.* $\square$

Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème (Weierstrass 1885)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle compact. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un polynôme* P *tel que* $|f(x) - P(x)| \le \varepsilon$ *pour tout* $x \in [a,b]$*. Autrement dit, on assure que* $\|f - P\|_\infty \le \varepsilon$*.* $\square$

Théorème (Bernstein 1912)

Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \le k \le n$ *le polynôme de base de Bernstein est*

$$B_n^k(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème (Weierstrass 1885)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle compact. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un polynôme* P *tel que* $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in [a,b]$*. Autrement dit, on assure que* $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$*.* $\square$

Théorème (Bernstein 1912)

Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq k \leq n$ *le polynôme de base de Bernstein est*

$$B_n^k(x) := \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Étant donnée une fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *on pose*

$$P_n := \textstyle\sum_{k=0}^{n} f(k/n) B_n^k(x).$$

Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

Peut-on approcher toute fonction continue par des polynômes ?

Théorème (Weierstrass 1885)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle compact. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que $|f(x) - P(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$. Autrement dit, on assure que $\|f - P\|_\infty \le \varepsilon$. $\square$

Théorème (Bernstein 1912)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \le k \le n$ le polynôme de base de Bernstein est

$$B_n^k(x) := \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Étant donnée une fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on pose

$$P_n := \textstyle\sum_{k=0}^n f(k/n) B_n^k(x).$$

Alors on a convergence uniforme $\|f - P\|_\infty \to 0$ pour $n \to \infty$. $\square$

Polynômes de Bernstein : illustration

On constate que

$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes de Bernstein

$$B_n^k(x) := \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

où $k = 0, \ldots, n$ forment une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$.

Polynômes de Bernstein : illustration

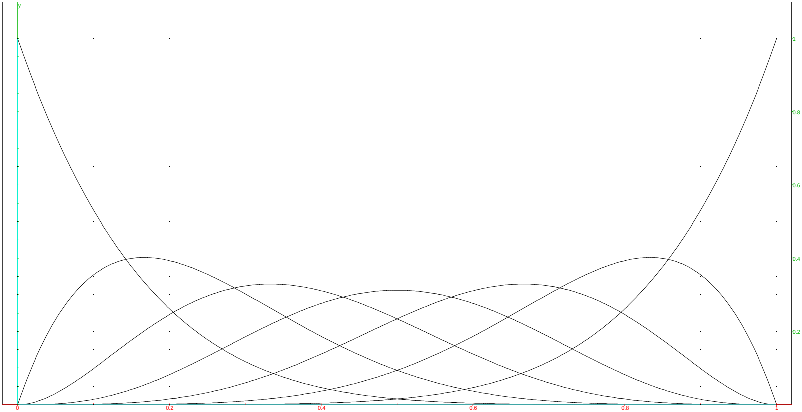
On constate que

$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes de Bernstein

$$B_n^k(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

où $k = 0, \ldots, n$ forment une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$.
Voici la graphique pour $n = 6$ et $k = 0, \ldots, 6$:



Sommaire

Approximations uniforme, en moyenne, et quadratique

Jusqu'ici nous avons regardé la distance uniforme :

$$\|f - P\|_\infty \quad := \quad \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|.$$

Approximations uniforme, en moyenne, et quadratique

Jusqu'ici nous avons regardé la distance uniforme :

$$\|f-P\|_\infty \quad := \quad \max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)|.$$

On pourrait s'intéresser à la distance en moyenne :

$$\|f-P\|_1 \quad := \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-P(x)|dx.$$

Approximations uniforme, en moyenne, et quadratique

Jusqu'ici nous avons regardé la distance uniforme :

$$\|f - P\|_\infty \quad := \quad \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|.$$

On pourrait s'intéresser à la distance en moyenne :

$$\|f - P\|_1 \quad := \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - P(x)| dx.$$

Ou bien la moyenne quadratique :

$$\|f - P\|_2 \quad := \quad \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - P(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Approximations uniforme, en moyenne, et quadratique

Jusqu'ici nous avons regardé la distance uniforme :

$$\|f-P\|_\infty \quad := \quad \max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)|.$$

On pourrait s'intéresser à la distance en moyenne :

$$\|f-P\|_1 \quad := \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-P(x)|dx.$$

Ou bien la moyenne quadratique :

$$\|f-P\|_2 \quad := \quad \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-P(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Produit scalaire, norme, distance

Pour $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues on pose $\langle f|g\rangle := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Produit scalaire, norme, distance

Pour $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues on pose $\langle f|g\rangle := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

C'est un *produit scalaire* dans le sens qu'il est

symétrique : $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle,$

bilinéaire : $\langle f|\lambda g + \mu h\rangle = \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle f|h\rangle,$

positif-défini : $\langle f|f\rangle \geq 0,$ et $\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Produit scalaire, norme, distance

Pour $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues on pose $\langle f|g\rangle := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

C'est un *produit scalaire* dans le sens qu'il est

symétrique : $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle,$

bilinéaire : $\langle f|\lambda g + \mu h\rangle = \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle f|h\rangle,$

positif-défini : $\langle f|f\rangle \geq 0,$ et $\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Ceci entraîne *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\langle f|g\rangle^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$.

Produit scalaire, norme, distance

Pour $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continues on pose $\langle f|g\rangle := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

C'est un *produit scalaire* dans le sens qu'il est

symétrique : $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle,$

bilinéaire : $\langle f|\lambda g + \mu h\rangle = \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle f|h\rangle,$

positif-défini : $\langle f|f\rangle \geq 0,$ et $\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Ceci entraîne *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\langle f|g\rangle^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$.

Le produit scalaire induit une *norme*, $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f|f\rangle}$:

homogénéité : $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2,$

inégalité triangulaire : $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2,$

positivité : $\|f\|_2 \geq 0,$ et $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Produit scalaire, norme, distance

Pour $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues on pose $\langle f|g\rangle := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$.

C'est un *produit scalaire* dans le sens qu'il est

symétrique : $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle$,

bilinéaire : $\langle f|\lambda g + \mu h\rangle = \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle f|h\rangle$,

positif-défini : $\langle f|f\rangle \geq 0$, et $\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Ceci entraîne *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\langle f|g\rangle^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$.

Le produit scalaire induit une *norme*, $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f|f\rangle}$:

homogénéité : $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2$,

inégalité triangulaire : $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$,

positivité : $\|f\|_2 \geq 0$, et $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

La norme induit une *distance*, $\operatorname{dist}(f,g) := \|f-g\|_2$:

symétrie : $\operatorname{dist}(f,g) = \operatorname{dist}(g,f)$,

inégalité triangulaire : $\operatorname{dist}(f,h) \leq \operatorname{dist}(f,g) + \operatorname{dist}(g,h)$,

positivité : $\operatorname{dist}(f,g) \geq 0$, et $\operatorname{dist}(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.

Polynômes orthogonaux : construction

On note $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Polynômes orthogonaux : construction

On note $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ s'écrit de manière unique comme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:
Les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$ forment une *base* de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$

Polynômes orthogonaux : construction

On note $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ s'écrit de manière unique comme
$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:
Les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$ forment une *base* de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$

Muni du produit scalaire $\langle | \rangle$, l'espace $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ est un espace euclidien.

Polynômes orthogonaux : construction

On note $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ s'écrit de manière unique comme
$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:
Les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$ forment une *base* de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$

Muni du produit scalaire $\langle | \rangle$, l'espace $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ est un espace euclidien.
Malheureusement la base $1, X, X^2, \ldots, X$ n'est pas *orthonormée*.

Polynômes orthogonaux : construction

On note $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ s'écrit de manière unique comme
$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:
Les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$ forment une *base* de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$

Muni du produit scalaire $\langle | \rangle$, l'espace $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ est un espace euclidien.
Malheureusement la base $1, X, X^2, \ldots, X$ n'est pas *orthonormée*.
On peut en produire une selon l'algorithme de Gram–Schmidt :

Polynômes orthogonaux : construction

On note $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ s'écrit de manière unique comme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:
Les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$ forment une *base* de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$

Muni du produit scalaire $\langle | \rangle$, l'espace $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ est un espace euclidien.
Malheureusement la base $1, X, X^2, \ldots, X$ n'est pas *orthonormée*.
On peut en produire une selon l'algorithme de Gram–Schmidt :

Algorithme 8 orthonormalisation selon Gram–Schmidt

Entrée: une base $u_0, \ldots, u_n$ d'un espace euclidien E

Sortie: une base $v_0, \ldots, v_n$ qui soit orthonormée

---

pour k **de** 0 **à** n **faire**
  $v_k \leftarrow u_k$
  pour j **de** 0 **à** $k-1$ **faire** $v_k \leftarrow v_k - \langle u_k | v_j \rangle v_j$ **fin pour**
  $v_k \leftarrow v_k / \|v_k\|_2$
fin pour
retourner $v_0, \ldots, v_n$

Orthonormalisation selon Gram–Schmidt

Théorème (Gram–Schmidt)

Soit $u_0, \ldots, u_n$ une base d'un espace euclidien E.

Orthonormalisation selon Gram–Schmidt

Théorème (Gram–Schmidt)

Soit $u_0, \ldots, u_n$ *une base d'un espace euclidien* E.
Pour $k = 0, \ldots, n$ *on pose*

$$\tilde{v}_k := u_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle u_k | v_j \rangle v_j \qquad \textit{puis} \qquad v_k := \tilde{v}_k / \|\tilde{v}_k\|_2.$$

Orthonormalisation selon Gram–Schmidt

Théorème (Gram–Schmidt)

Soit $u_0, \dots, u_n$ *une base d'un espace euclidien* E*.*
Pour $k = 0, \dots, n$ *on pose*

$$\tilde{v}_k := u_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle u_k | v_j \rangle v_j \qquad \textit{puis} \qquad v_k := \tilde{v}_k / \|\tilde{v}_k\|_2.$$

Alors $v_0, \dots, v_n$ *est une base orthonormée de* E*, c'est-à-dire*

$$\langle v_k | v_k \rangle = 1 \quad \textit{et} \quad \langle v_k | v_j \rangle = 0 \quad \textit{pour } j \neq k.$$

Meilleure approximation pour la distance $\|\cdot\|_2$

Proposition

Soit $P_0, \ldots, P_n$ une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ orthonormée par rapport à $\langle | \rangle$.

Meilleure approximation pour la distance $\|\cdot\|_2$

Proposition

Soit $P_0, \ldots, P_n$ *une base de* $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ *orthonormée par rapport à* $\langle | \rangle$.
Soit $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue quelconque.*

Meilleure approximation pour la distance $\|\cdot\|_2$

Proposition

Soit $P_0, \dots, P_n$ une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ orthonormée par rapport à $\langle | \rangle$.
Soit $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue quelconque.
Posons $a_k := \langle f | P_k \rangle$ puis $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$.

Meilleure approximation pour la distance $\|\cdot\|_2$

Proposition

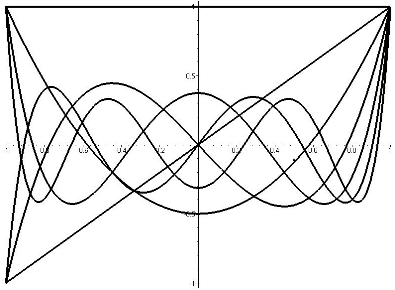
Soit $P_0, \ldots, P_n$ *une base de* $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ *orthonormée par rapport à* $\langle | \rangle$*.*
Soit $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue quelconque.*
Posons $a_k := \langle f | P_k \rangle$ *puis* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$*. Alors* P *est l'unique polynôme de* $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ *qui minimise la distance* $\|f - P\|_2$*.*

Exemple : polynômes de Legendre

Orthonormalisons $1, X, \ldots, X^n$ sur $[-1, 1]$ par Gram–Schmidt.

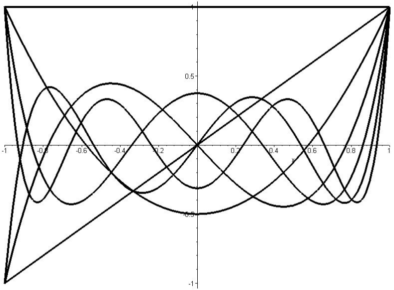
Exemple : polynômes de Legendre

Orthonormalisons $1, X, \dots, X^n$ sur $[-1, 1]$ par Gram–Schmidt.
À des facteurs constants près on obtient les polynômes de Legendre :



Exemple : polynômes de Legendre

Orthonormalisons $1, X, \dots, X^n$ sur $[-1, 1]$ par Gram–Schmidt.
À des facteurs constants près on obtient les polynômes de Legendre :



Exercice

Calculez puis affichez les premiers termes avec votre calculatrice et/ou votre logiciel préféré. Établir une récurrence

$$P_n = (X - \lambda_n) P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

avec des constantes réelles λ_n, μ_n que l'on déterminera.
Est-ce une suite de Sturm ? Que dire alors des racines de P_n ?

Résumé

1. Approximation polynomiale et norme uniforme
   - Interpolation de Lagrange, différences divisées
   - Majoration de l'erreur, phénomène de Runge
   - Théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein

2. Polynômes orthogonaux et norme quadratique
   - Approximations uniforme, en moyenne, et quadratique
   - Produit scalaire, orthonormalisation selon Gram–Schmidt
   - Meilleure approximation pour la norme quadratique