Introduction à la Cryptologie

Chapitre 6 : Le cryptosystème RSA

Michael Eisermann (Institut Fourier, UJF Grenoble)

Année 2008-2009
IF / IMAG, Master 1, S1-S2

document mis à jour le 7 juillet 2009

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/cours#crypto

Objectifs de ce chapitre

Développement mathématique : le cryptosystème RSA.

- Le petit théorème de Fermat.
- Le test de primalité selon Miller–Rabin.

Développement algorithmique : implémentation de RSA.

- Assembler tous les algorithmes précédents.
- Production des grands nombres premiers.

Sommaire

Le petit théorème de Fermat

Théorème (petit Fermat, formulation dans $\mathbb{Z}$)

Si $p \in \mathbb{N}$ est premier alors tout $a \in \mathbb{Z}$ vérifie $a^p \equiv a \mod p$.

Démonstration. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on a

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \equiv a^p + b^p \mod p.$$

Rappel : si $p \in \mathbb{N}$ est premier et $0 < k < p$, alors p divise $\binom{p}{k}$.

On a $0^p = 0$ et $1^p = 1$, puis on procède par récurrence sur $a \in \mathbb{N}$:

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a + 1 \mod p.$$

Si $a < 0$ on conclut par $a^p \equiv -(-a)^p \equiv -(-a) \equiv a \mod p$. □

Corollaire (petit Fermat, formulation dans $\mathbb{Z}/p$)

Soit p premier. Tout $x \in \mathbb{Z}/p$ vérifie $x^p = x$ et tout $x \in \mathbb{Z}/p^*$ vérifie $x^{p-1} = \bar{1}$.

Démonstration. Tout $x \in \mathbb{Z}/p$ s'écrit comme $x = \bar{a}$ où $a \in \mathbb{Z}$.
Dans $\mathbb{Z}$ on a $a^p \equiv a \mod p$. Dans $\mathbb{Z}/p$ on a donc $x^p = \bar{a}^p = \overline{a^p} = \bar{a} = x$.
Pour $x \in \mathbb{Z}/p^* = \mathbb{Z}/p^\times$ l'égalité $x^p = x$ implique $x^{p-1} = \bar{1}$. □

Le petit théorème de Fermat : conséquences

L'observation suivante est un résultat d'Euler :

Corollaire

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux nombres premiers distincts et $n = pq$.
Alors $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, et tout $x \in \mathbb{Z}/n^\times$ vérifie $x^{\varphi(n)} = \bar{1}$.

Démonstration. On a $\Phi\colon \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ par le théorème chinois.
Si $\Phi(x) = (y, z)$, alors $x \in \mathbb{Z}/n^\times$ si et seulement si $y \in \mathbb{Z}/p^\times$ et $z \in \mathbb{Z}/q^\times$.
Dans ce cas on trouve

$$\begin{aligned}\Phi\big(x^{\varphi(n)}\big) &= \Phi(x)^{\varphi(n)} = (y,z)^{\varphi(n)} = \big(y^{\varphi(n)}, z^{\varphi(n)}\big)\\ &= \big((y^{p-1})^{q-1}, (z^{q-1})^{p-1}\big) = (\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(\bar{1}).\end{aligned}$$

Comme Φ est bijective on conclut que $x^{\varphi(n)} = \bar{1}$. □

Le petit théorème de Fermat : conséquences

L'observation suivante est à la base du cryptosystème RSA :

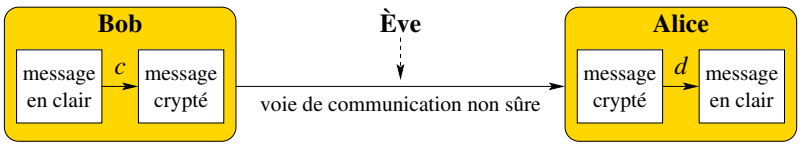
Corollaire

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux nombres premiers distincts et $n = pq$.
Soit $e = 1 + k \cdot \varphi(n)$ où $k \in \mathbb{N}$. Alors tout $x \in \mathbb{Z}/n$ vérifie $x^e = x$.

Démonstration. On a $\Phi\colon \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ par le théorème chinois.
Pour $\Phi(x) = (y, z)$ on distingue quatre cas :

- Si $y \neq \bar{0}$ et $z \neq \bar{0}$, alors
$$x^e = x^1 \cdot (x^{\varphi(n)})^k = x \cdot \bar{1} = x.$$
- Si $y = \bar{0}$ et $z \neq \bar{0}$, alors
$$\Phi(x^e) = (\bar{0}^e, z^e) = (\bar{0}, z^{1+k\varphi(n)}) = \big(\bar{0}, z \cdot (z^{q-1})^{k(p-1)}\big) = (\bar{0}, z) = \Phi(x).$$
Comme Φ est bijective on conclut que $x^e = x$.
- Si $y \neq \bar{0}$ et $z = \bar{0}$, l'argument est symétrique au précédent.
- Si $y = \bar{0}$ et $z = \bar{0}$, alors $x = \bar{0}$ et $x^e = x = \bar{0}$. □

RSA : cryptage et décryptage



Clés : Soit $n = pq$ où $p, q \in \mathbb{N}$ sont deux nombres premiers distincts.
Soient $c, d \in \mathbb{N}$ tels que $cd \equiv 1$ modulo $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

Cryptage : Bob représente son message par $m \in \mathbb{Z}/n$.
Il calcule le message crypté $\tilde{m} = m^c$.

Décryptage : Alice reçoit le message crypté $\tilde{m} \in \mathbb{Z}/n$.
Elle en déduit le message en clair $m = \tilde{m}^d$.

Pourquoi cela marche ? On vient de montrer que

$$\text{le cryptage} \quad m \mapsto m^c \quad \text{et le décryptage} \quad \tilde{m} \mapsto \tilde{m}^d$$

définissent deux applications $\mathbb{Z}/n \leftrightarrow \mathbb{Z}/n$ qui sont mutuellement inverses.

◈ Ces calculs sont efficaces avec la puissance modulaire rapide !

RSA : petits exemples

Exercice

Pour $n = 5 \cdot 7$ et la clé de cryptage $c = 5$ déterminer la clé de décryptage d.
Crypter le message $m = \bar{4}$, puis décrypter le message ainsi crypté.

Solution. On trouve $\varphi(n) = 4 \cdot 6 = 24$.
Pour $d = 5$ on a $cd = 25 \equiv 1 \mod 24$.
Dans $\mathbb{Z}/35$ on crypte $m = \bar{4}$ en $\tilde{m} = m^c = \bar{4}^5 = \overline{1024} = \bar{9}$.
Puis on décrypte $\tilde{m}$ en $\tilde{m}^d = \bar{9}^5 = \overline{59049} = \bar{4}$. ☺

Exercice

Pour $n = 7 \cdot 11$ et la clé de cryptage $c = 7$ déterminer la clé de décryptage d.
Crypter le message $m = \bar{4}$, puis décrypter le message ainsi crypté.

Solution. On trouve $\varphi(n) = 6 \cdot 10 = 60$.
Pour $d = 43$ on a $cd = 301 \equiv 1 \mod 60$.
Dans $\mathbb{Z}/77$ on crypte $m = \bar{4}$ en $\tilde{m} = m^c = \bar{4}^7 = \overline{16384} = \overline{60}$.
Puis on décrypte $\tilde{m}$ en $\tilde{m}^d = \overline{60}^{43} = \bar{4}$.
(Utiliser une calculette et la puissance modulaire.) ☺

RSA : production des clés

Alice construit un triplet (n, c, d) vérifiant $cd \equiv 1$ modulo $\varphi(n)$:

1. Elle choisit deux grands nombres premiers distincts $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Elle calcule leur produit $n = pq$ ainsi que $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
3. Elle choisit un entier $c \in \mathbb{N}$ premier avec $\varphi(n)$.
4. Elle calcule un inverse $d \in \mathbb{N}$ tel que $cd \equiv 1$ modulo $\varphi(n)$.

Tous ces calculs sont efficaces ; il reste à préciser l'étape (1).

Clé publique : La clé publique d'Alice est la paire (n, c).

Ainsi tout le monde peut envoyer des messages cryptés $\tilde{m} = m^c$ à Alice.

Clé sécrète : La clé sécrète d'Alice est d.

Ainsi Alice sait décrypter des messages en calculant $m = \tilde{m}^d$.

Hypothèses : La sécurité de RSA repose sur certaines hypothèses :

- Il est difficile de retrouver les facteurs p et q à partir de n.
- Sans connaître p et q, il est difficile de trouver $\varphi(n)$ à partir de n.
- Sans connaître $\varphi(n)$, il est difficile de trouver d à partir de (n, c).
- Sans connaître d, il est difficile de trouver m à partir de $\tilde{m}$.

RSA : problèmes et attaques connus

Règles évidentes de bon sens :

- Il faut choisir p et q suffisamment grands.
  Actuellement on utilise entre 1024 et 2048 bits.
- Il faut changer la clé (n, c, d) régulièrement.
  Ceci limite le temps pour des attaques à brute force.
- Transmettre les clés publiques par un « serveur sûr ».
  Sinon aucun cryptosystème ne peut fonctionner.

Failles de sécurité plus subtiles :

- La factorisation est rapide pour certains produits $n = pq$.
  Éviter des premiers « faibles » et choisir des premiers « forts ».
- Certaines clés publiques c révèlent de l'information sur d.
  Éviter des clés « faibles » et choisir des clés « fortes ».
- Certains messages $\tilde{m}$ révèlent de l'information sur m ou d.
  Bien choisir le codage des messages $m \in \mathbb{Z}/n$.

⚠ Les détails dépendent de l'état de l'art de la cryptanalyse !

La sécurité du cryptosystème RSA n'est pas mathématiquement prouvée.

Elle n'est pas absolue mais relative aux connaissances actuelles.

RSA : signature et authentification

Objectif : Alice veut ***signer*** un document électronique, de sorte que tout le monde puisse ***vérifier*** la signature, mais personne ne puisse la ***falsifier***.

Signature : Alice signe son message m à l'aide d'une fonction de hachage

$$h\colon \{\text{messages}\} \to \mathbb{Z}/n, \quad m \mapsto h(m).$$

C'est une ***somme de contrôle*** ou une ***empreinte cryptographique***.

Alice calcule $s = h(m)^d$ dans $\mathbb{Z}/n$. Le message signé est (m, s).

Authentification : Bob reçoit (m, s) et récupère la clé publique (n, c) d'Alice.

Il calcule s^c dans $\mathbb{Z}/n$ et le compare à l'empreinte $h(m)$.

Si $s^c = h(m)$ alors le message est authentifié.

Hypothèses : La sécurité repose sur les mêmes hypothèses qu'avant.

En plus, il faut une fonction de hachage fiable dans le sens que pour le message m il est difficile de construire m' tel que $h(m) = h(m')$.

Comptage des nombres premiers

Théorème (Euclide, environ 300 avant notre ère)

Il existe une infinité de nombres premiers. □

Algorithme 6.1 crible d'Ératosthène (environ 275–194 avant notre ère)

Entrée: la liste $(p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots, p_{k-1})$ des k plus petits nombres premiers
Sortie: la liste $(p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots, p_{k-1}, p_k)$ des $k+1$ plus petits nombres premiers

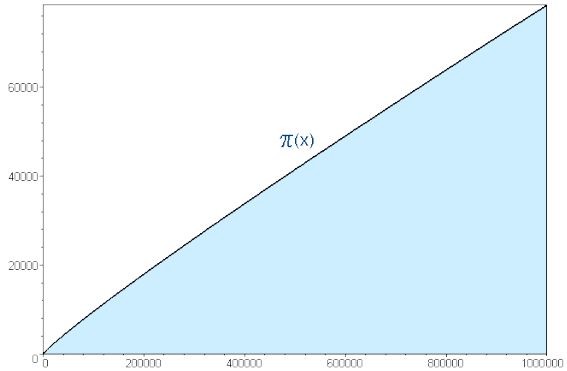
$p \leftarrow p_{k-1} + 2, \quad i \leftarrow 1$
tant que $p_i^2 \leq p$ **faire si** $p_i \nmid p$ **alors** $i \leftarrow i + 1$ **sinon** $p \leftarrow p + 2, \ i \leftarrow 1$
retourner la liste prolongée $(p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots, p_{k-1}, p)$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\pi(n)$ le nombre des entiers premiers dans $\{1, \ldots, n\}$.

k	$\pi(10^k)$	k	$\pi(10^k)$	k	$\pi(10^k)$
1	4	8	5 761 455	15	29 844 570 422 669
2	25	9	50 847 534	16	279 238 341 033 925
3	168	10	455 052 511	17	2 623 557 157 654 233
4	1 229	11	4 118 054 813	18	24 739 954 287 740 860
5	9 592	12	37 607 912 018	19	234 057 667 276 344 607
6	78 498	13	346 065 536 839	20	2 220 819 602 560 918 840
7	664 579	14	3 204 941 750 802	21	21 127 269 486 018 731 928

Le théorème des nombres premiers : asymptotique

En contemplant ce tableau jusqu'à 10^6 Gauss conjectura que $\pi(n) \sim n/\ln n$.



Théorème (Hadamard et de la Vallée Poussin 1896)

On a l'équivalence asymptotique $\pi(n) \sim n/\ln n$. □

Ceci veut dire que le quotient $\frac{\pi(n)}{n/\ln n}$ converge vers 1 pour $n \to \infty$.

Le théorème des nombres premiers : encadrement

La version quantitative suivante donne un encadrement explicite :

Théorème (Rosser–Schoenfeld 1962)

Pour $n \geq 59$ *on a l'encadrement*

$$\frac{n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2\ln n}\right) \quad < \quad \pi(n) \quad < \quad \frac{n}{\ln n}\left(1+\frac{3}{2\ln n}\right).$$

Corollaire

L'intervalle $\{a \in \mathbb{Z} \mid n \leq a < 2n\}$ *contient* $\sim n/\ln n$ *nombres premiers.* □

Corollaire

Si l'on tire au hasard un entier dans l'intervalle $\{n, \ldots, 2n\}$
alors la probabilité de tomber sur un nombre premier est $\sim 1/\ln n$. □

Test de primalité : approche naïve

Critère

Un entier $n \in \mathbb{N}$ *est premier si et seulement si* $\mathbb{Z}/_n^\times = \mathbb{Z}/_n^*$.
Il est composé si et seulement s'il existe $0 < a < n$ *tel que* $\operatorname{pgcd}(a, n) > 1$.

Test naïf de primalité :

On tire a au hasard dans $\{1, \ldots, n-1\}$.
Si $\operatorname{pgcd}(a, n) > 1$ alors n est composé (et on connaît un facteur).

Pourquoi cela ne marche pas bien ?

Supposons que n est composé, $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$.
La probabilité qu'un élément $x \in \mathbb{Z}/_n$ choisi au hasard soit inversible vaut

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k}\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big).$$

Si n n'a pas de petits facteurs, alors cette probabilité est proche de 1.
La probabilité de tomber sur un élément non inversible est proche de 0. ☹

Test de primalité selon Fermat

Critère (petit théorème de Fermat)

Si n *est premier, alors tout* $x \in \mathbb{Z}/_n^*$ *vérifie* $x^{n-1} = 1$.

Test de primalité selon Fermat :

On tire x au hasard dans $\mathbb{Z}/_n^*$ puis on vérifie si $x^{n-1} = 1$.
Si $x^{n-1} \neq 1$, alors n est composé (sans que l'on connaisse de facteur).
Dans ce cas on dit que x est un ***témoin de décomposabilité*** de n,
ou encore que x ***témoigne*** contre la primalité de n.

Est-ce efficace ? Parfois oui, mais pas toujours :

Observation (Korsel 1899, Carmichael 1910)

Il existe des nombres composés n tel que $a^n \equiv a \mod n$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

Les plus petits exemples sont 561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, … On sait depuis 1994 qu'il en existe une infinité.

Dans ces cas tout élément inversible $x \in \mathbb{Z}/_n^\times$ vérifie $x^{n-1} = 1$.
Ainsi trouver un témoin est aussi rare que dans le test naïf précédent. ☹

L'astuce de la racine carrée

Si n est premier, alors tout $x \in \mathbb{Z}/n^*$ vérifie $x^{n-1} = 1$.

Or, ce beau critère n'est pas infaillible. Essayons de l'optimiser :

Critère

Si n est un nombre premier impair, alors tout $x \in \mathbb{Z}/n^*$ vérifie $x^{\frac{n-1}{2}} = \pm 1$. □

Démonstration. D'après Fermat $y = x^{\frac{n-1}{2}}$ vérifie $y^2 = 1$.

Si n est premier, alors $y^2 = 1$ n'admet que deux solutions dans $\mathbb{Z}/n$:

$$\begin{aligned} & y^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (y-1)(y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 1 \text{ ou } y = -1. \end{aligned}$$

Pour la dernière implication on utilise que $\mathbb{Z}/n$ est un corps. □

Remarque

Si $n = pq$ est composé de deux facteurs premiers distincts, alors $y^2 = 1$ admet quatre solutions : dans $\mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ on trouve les deux $(\bar{1}, \bar{1})$ et $(-\bar{1}, -\bar{1})$ comme avant, mais aussi deux autres $(-\bar{1}, +\bar{1})$ et $(+\bar{1}, -\bar{1})$.

Le critère de Miller–Rabin

Critère (de Miller–Rabin)

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. On décompose $n - 1 = 2^e q$ avec $e \geq 1$ et q impair.
Si n est premier, alors tout $x \in \mathbb{Z}/n^*$ satisfait ou $x^q = 1$
ou il existe $k \in \{0, \ldots, e-1\}$ tel que $x^{2^k q} = -1$.

Démonstration. D'après Fermat $y = x^q$ vérifie $y^{2^e} = 1$.

Pour $k := \min\{i \in \mathbb{N} \mid y^{2^i} = 1\}$ on a donc $k \leq e$.

Si $k > 1$ alors $y^{2^k} = 1$ et $y^{2^{k-1}} = -1$.

Si $k = 0$ alors $y = 1$. □

Test de primalité selon Miller–Rabin :

On tire x au hasard dans $\mathbb{Z}/n^*$ puis on vérifie le critère ci-dessus.

Si $x^q \neq \bar{1}$ et $x^{2^k q} \neq -\bar{1}$ pour $k = 0, \ldots, e-1$, alors n est composé.

Dans ce cas on dit que x est un ***témoin de décomposabilité*** de n,
ou que x ***témoigne*** contre la primalité de n (au sens de Miller–Rabin).

Le critère est nécessaire pour la primalité de n mais non suffisante.
Si x passe le critère on dit que n est ***pseudo-premier*** à base x.

Le critère de Miller–Rabin : prêt à programmer

Algorithme 6.2 le critère de Miller–Rabin

Entrée: un entier impair $n \geq 5$ et un entier x
Sortie: le message « composé » ou « pseudo-premier »

```
décomposer n − 1 = 2^e q où e ≥ 1 et q impair        // divisions itérées
calculer y ← x^q rem n                               // puissance modulaire rapide
si y = 1 alors retourner « pseudo-premier »          // x passe car x^q ≡ 1.
pour k de 1 à e faire
    si y = n − 1 alors retourner « pseudo-premier »  // x passe car x^{2^{k−1} q} ≡ −1
    y ← y^2 rem n                                    // calculer y = x^{2^k q} rem n
fin pour
retourner « composé »                                // x ne passe pas le critère.
```

Exercice

Quelle est la complexité de cet algorithme ?
Comment interpréter les deux réponses ?

Témoins au sens de Fermat et de Miller–Rabin

Exemple

Explicitons les témoins $x \in \mathbb{Z}/n^\times$ pour $n = 21$.

Ici $n - 1 = 20 = 2^2 \cdot 5$ donc $e = 2$ et $q = 5$.

x	x^5	x^{10}	x^{20}	critère	x	x^5	x^{10}	x^{20}	critère
1	1	1	1	jamais	11	2	4	16	Fermat
2	11	16	4	Fermat	12	3	9	18	pgcd
3	12	18	9	pgcd	13	13	1	1	Miller–Rabin
4	16	4	16	Fermat	14	14	7	7	pgcd
5	17	16	4	Fermat	15	15	15	15	pgcd
6	6	15	15	pgcd	16	4	16	4	Fermat
7	7	7	7	pgcd	17	5	4	16	Fermat
8	8	1	1	Miller–Rabin	18	9	18	9	pgcd
9	18	9	18	pgcd	19	10	16	4	Fermat
10	19	4	16	Fermat	20	20	1	1	jamais

Le théorème de Rabin et Monier

Théorème (Rabin et Monier 1980)

Soit n un entier impair, $n \geq 3$.

1. *Si n est premier, alors tout $x \in \mathbb{Z}/n^*$ satisfait au critère de Miller–Rabin.*
2. *Si n est composé, alors il y a au moins $\frac{3}{4}(n-1)$ témoins $x \in \mathbb{Z}/n^*$.*

Il y a au moins 75% de témoins et au plus 25% de non-témoins.

En général les témoins sont encore beaucoup plus fréquents.

Exemple

Reprenons le plus petit nombre de Carmichael, $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Parmi les 560 éléments non nuls, 240 ne sont pas inversibles (43%).

Tous les éléments inversibles satisfont au critère de Fermat.

Seulement 10 éléments passent le critère de Miller–Rabin, soit moins de 2%.
(Il s'agit de $1, 50, 101, 103, 256, 305, 458, 460, 511, 560$.)

Test de primalité selon Miller–Rabin

Algorithme 6.3 test de primalité selon Miller–Rabin

Entrée: un entier impair $n \geq 5$
Sortie: le message « composé » ou « pseudo-premier »

décomposer $n - 1 = 2^e q$ où $e \geq 1$ et q impair // divisions itérées
pour t **de** 1 **à** 50 **faire**
  tirer $x \in \mathbb{Z}/n^*$ au hasard et appliquer le critère de Miller–Rabin
  si x témoigne que n est composé **alors retourner** « composé »
fin pour
retourner « pseudo-premier »

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair, $n \geq 5$.

1. *Si n est premier, alors l'algorithme répond toujours « pseudo-premier ».*
2. *Si n est composé, alors les deux réponses sont possibles :*
   L'algorithme répond « pseudo-premier » avec une probabilité $\leq 4^{-50}$.
   L'algorithme répond « composé » avec une probabilité $\geq 1 - 4^{-50}$.

Production de grands nombres premiers aléatoires

Algorithme 6.4 production de grands nombres premiers aléatoires

Entrée: un entier impair $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq 3$.
Sortie: un nombre premier aléatoire $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \leq p < 2n$

$p \leftarrow 2k + 1$ où l'on choisit k aléatoirement dans $\{\frac{n-1}{2}, \ldots, n-1\}$
si p admet un petit facteur $3, 5, 7, 11, \ldots$ **alors** recommencer
si le test de Miller–Rabin sur p répond « composé » **alors** recommencer
retourner p

Terminaison : La probabilité que p soit premier est $\sim 2/\ln(n)$.

En moyenne il faut itérer $\sim \ln(n)/2$ fois avant de tomber sur un premier.

Probabilité d'erreur : Supposons que $\ln(n) \ll 4^{50}$, disons $\ln(n) \leq 4^{10}$.

Alors la probabilité que p soit composé est $\leq 4^{-50} \ln(n)$.

Précautions pratiques :

- Il faut un bon générateur de nombres aléatoires (voir Knuth).
- Pour RSA il faut encore éviter des nombres premiers « faibles ».

Probabilité d'erreur

On note $\mathbb{P}(X \mid Y) := \frac{\mathbb{P}(X \cap Y)}{\mathbb{P}(Y)}$ la probabilité de X sachant Y.
Dans l'algorithme probabiliste ci-dessus notons

$$P := \{\text{le nombre aléatoire } p = 2k+1 \text{ est premier}\},$$
$$R := \{\text{Miller–Rabin répond « pseudo-premier »}\}.$$

Nous savons que $\mathbb{P}(P) \sim 2/\ln(n)$ ainsi que

$$\mathbb{P}(R \mid P) = 1, \qquad \mathbb{P}(R \mid P^c) = \varepsilon,$$
$$\mathbb{P}(R^c \mid P) = 0, \qquad \mathbb{P}(R^c \mid P^c) = 1 - \varepsilon.$$

On a évidemment $\mathbb{P}(P^c \mid R^c) = 1$ et $\mathbb{P}(P \mid R^c) = 0$.
En supposant $\varepsilon \ll 2/\ln(n)$ la formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P \mid R) &= \frac{\mathbb{P}(R \mid P) \cdot \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(R \mid P) \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(R \mid P^c) \cdot \mathbb{P}(P^c)} \\ &\approx \frac{2/\ln(n)}{2/\ln(n) + \varepsilon \cdot (1 - 2/\ln(n))} \approx 1 - \varepsilon \ln(n)/2 \\ \mathbb{P}(P^c \mid R) &= \frac{\mathbb{P}(R \mid P^c) \cdot \mathbb{P}(P^c)}{\mathbb{P}(R \mid P^c) \cdot \mathbb{P}(P^c) + \mathbb{P}(R \mid P) \cdot \mathbb{P}(P)} \\ &\approx \frac{\varepsilon \cdot (1 - 2/\ln(n))}{\varepsilon \cdot (1 - 2/\ln(n)) + 2/\ln(n)} \approx \varepsilon \ln(n)/2\end{aligned}$$