Le théorème du dictateur

Séminaire Mathématiques et Applications

Dans la série « comment écrire une thèse en une semaine puis décrocher le prix Nobel d'économie »

Michael Eisermann

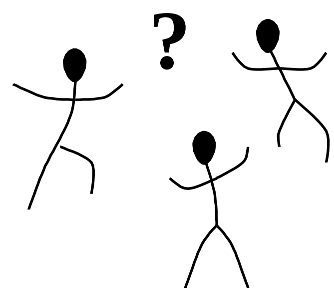
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/`

GRENOBLE 1 UNIVERSITE JOSEPH FOURIER SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ

Institut Fourier, 24 février 2005

Plan de l'exposé

① La problématique générale :
Comment se mettre d'accord dans un groupe ?



② Modélisation mathématique : l'approche axiomatique.

③ Trois axiomes : transitivité, unanimité, monotonie.

④ Deux exemples : dictature et scrutin majoritaire.

⑤ Le paradoxe de Condorcet ($\approx$ 1789).

⑥ Le théorème d'Arrow (1948).

Comment déterminer un « choix social » ?

Problématique :

Comment trouver un compromis entre priorités divergentes ?

Comment construire un mode de scrutin qui soit « optimal » ?

Comment déterminer un « choix social » ?

Problématique :
Comment trouver un compromis entre priorités divergentes ?
Comment construire un mode de scrutin qui soit « optimal » ?

Exemple : Soit $I = \{1, 2, 3, 4\}$ un groupe d'étudiants. Afin de préparer leurs examens ensemble, ils veulent se mettre d'accord sur les priorités : $a =$ algèbre, $b =$ intégration, $c =$ calcul diff.

Comment déterminer un « choix social » ?

Problématique :
Comment trouver un compromis entre priorités divergentes ?
Comment construire un mode de scrutin qui soit « optimal » ?

Exemple : Soit $I = \{1, 2, 3, 4\}$ un groupe d'étudiants. Afin de préparer leurs examens ensemble, ils veulent se mettre d'accord sur les priorités : $a =$ algèbre, $b =$ intégration, $c =$ calcul diff.

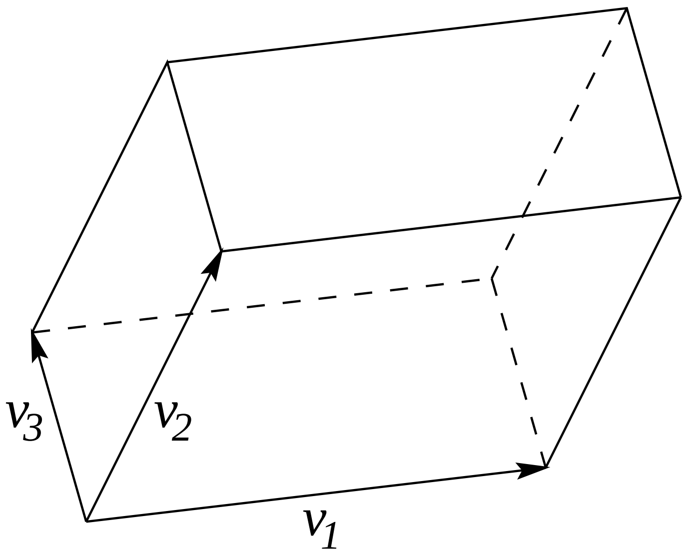
Chacun des étudiants a ses préférences individuelles :

$$\begin{array}{llllll} 1: & b & \succ & a & \succ & c \\ 2: & a & \succ & c & \succ & b \\ 3: & a & \approx & b & \succ & c \\ 4: & c & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

Comment trouver un compromis « raisonnable » ?

Une analogie tirée par les cheveux

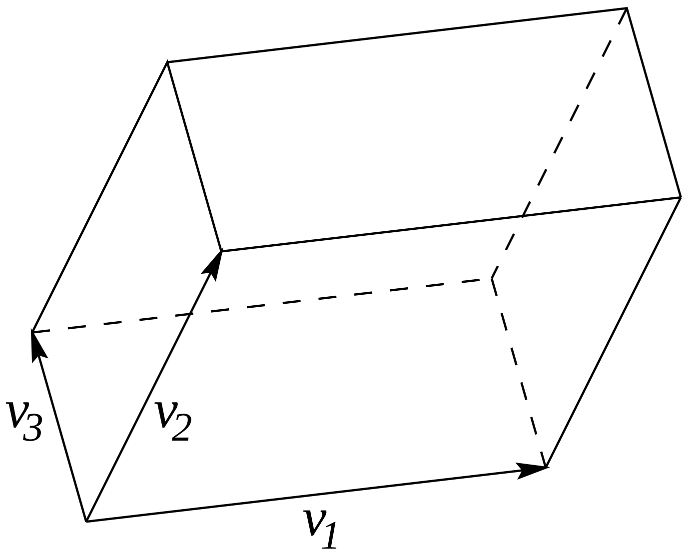
Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



$$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$$

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



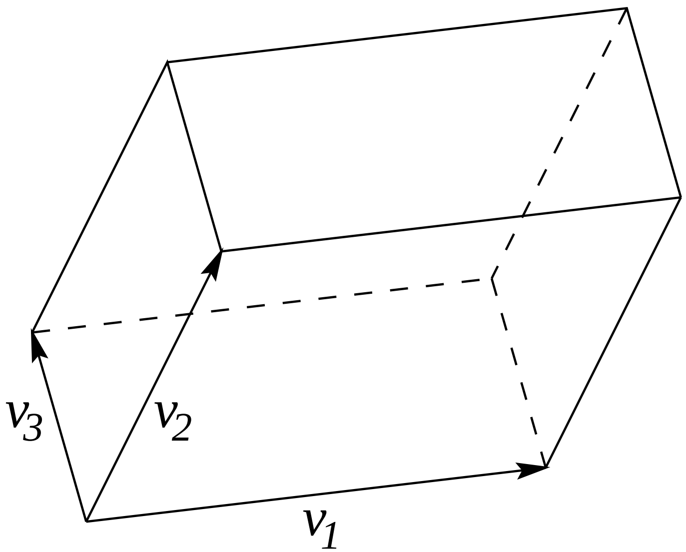
$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$

Idée : on cherche

$\mathrm{vol} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



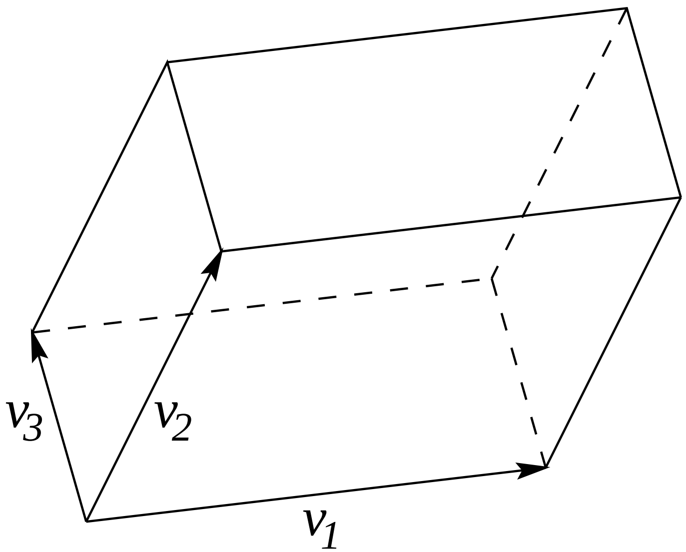
$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$

Idée : on cherche
$\mathrm{vol}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

ou plus généralement
$\mathrm{vol}_n\colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$

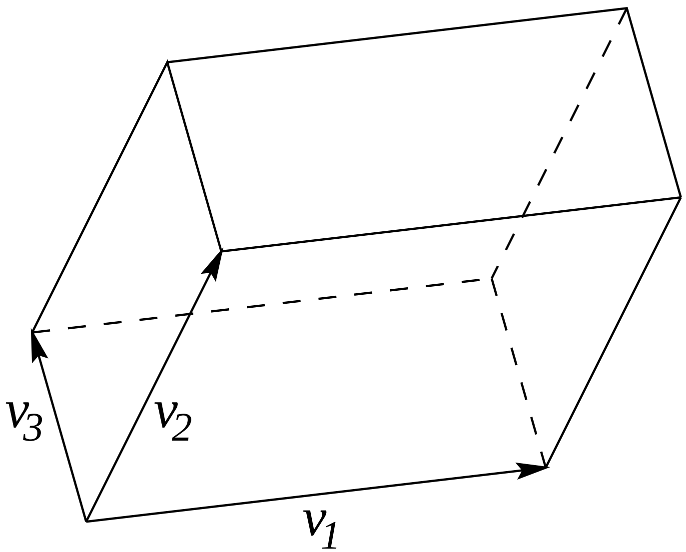
Idée : on cherche
$\mathrm{vol} \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

ou plus généralement
$\mathrm{vol}_n \colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit

homogène : $\mathrm{vol}(\dots, \lambda v_i, \dots) = \lambda \mathrm{vol}(\dots, v_i, \dots)$

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$

Idée : on cherche
$\mathrm{vol}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

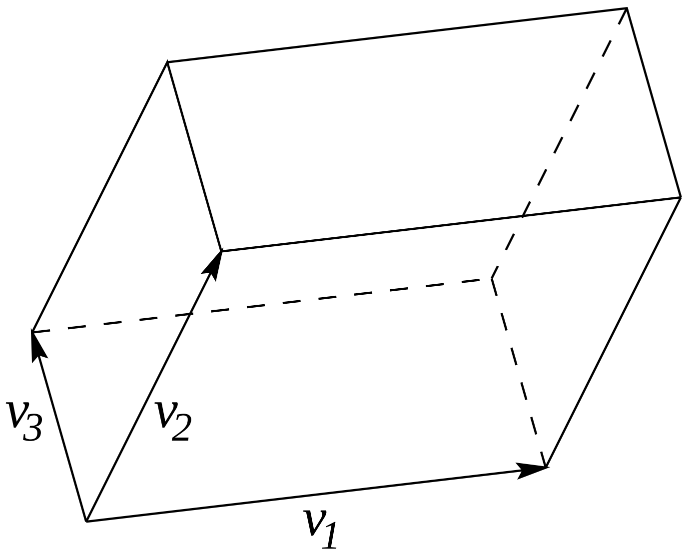
ou plus généralement
$\mathrm{vol}_n\colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit

homogène : $\mathrm{vol}(\ldots, \lambda v_i, \ldots) = \lambda \mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots)$

additif : $\mathrm{vol}(\ldots, v_i + v_i', \ldots) = \mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots) + \mathrm{vol}(\ldots, v_i', \ldots)$

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$

Idée : on cherche
$\mathrm{vol}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

ou plus généralement
$\mathrm{vol}_n\colon \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ qui soit

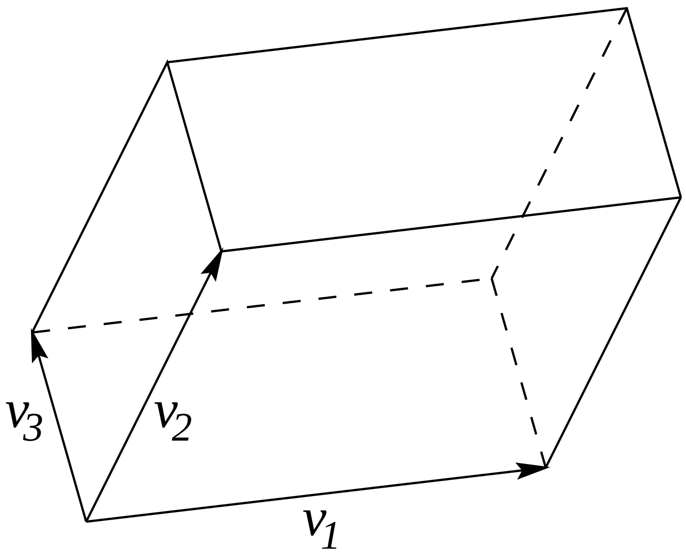
homogène : $\mathrm{vol}(\ldots, \lambda v_i, \ldots) = \lambda \mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots)$

additif : $\mathrm{vol}(\ldots, v_i + v_i', \ldots) = \mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots) + \mathrm{vol}(\ldots, v_i', \ldots)$

alterné : Si $v_i = v_j$ pour $i \neq j$, alors $\mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0$.

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$

Idée : on cherche
$\mathrm{vol}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

ou plus généralement
$\mathrm{vol}_n\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ qui soit

homogène : $\mathrm{vol}(\ldots, \lambda v_i, \ldots) = \lambda \mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots)$

additif : $\mathrm{vol}(\ldots, v_i + v_i', \ldots) = \mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots) + \mathrm{vol}(\ldots, v_i', \ldots)$

alterné : Si $v_i = v_j$ pour $i \neq j$, alors $\mathrm{vol}(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0$.

normé : Pour le cube unitaire on exige $\mathrm{vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Le théorème du déterminant

Définition :
On appelle *déterminant* toute application $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$
qui soit multilinéaire, alternée, normée.

Le théorème du déterminant

Définition :
On appelle *déterminant* toute application $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit multilinéaire, alternée, normée.

Théorème :
Il existe un et un seul déterminant $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le théorème du déterminant

Définition :
On appelle *déterminant* toute application $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$
qui soit multilinéaire, alternée, normée.

Théorème :
Il existe un et un seul déterminant $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$.
☞ Formules, algorithmes, applications, généralisations, ...

Le théorème du déterminant

Définition :
On appelle *déterminant* toute application $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$
qui soit multilinéaire, alternée, normée.

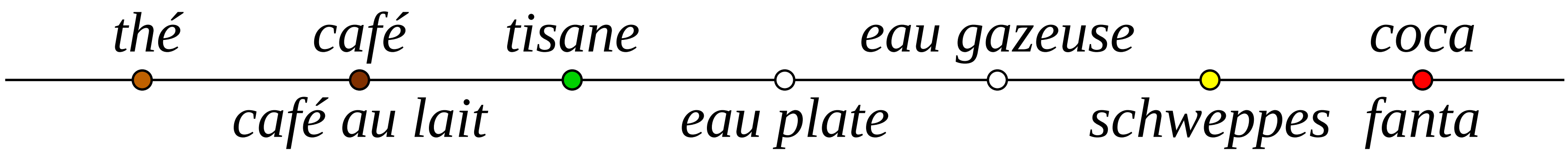
Théorème :
Il existe un et un seul déterminant $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$.
☞ Formules, algorithmes, applications, généralisations, . . .

exemples (mathématiques), expériences (physiques)	abstraction $\longrightarrow$ modélisation	formulation d'axiomes, propriétés essentielles
pratique $\uparrow$ généralisation ? réfutation ?		théorie $\downarrow$ étude mathématique
applications des résultats, vérification du modèle	application $\longleftarrow$ interprétation	déduction de théorèmes, propriétés moins évidentes

Comment modéliser des préférences ?

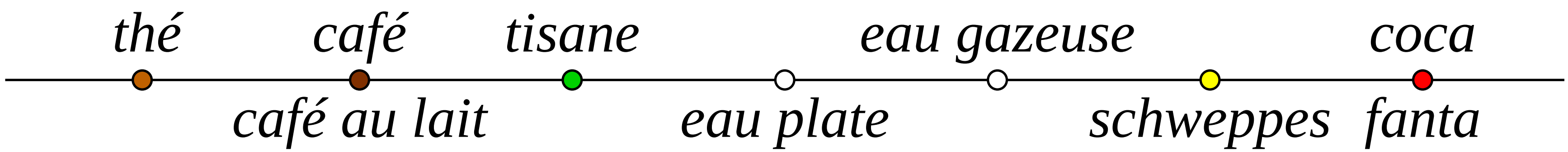
Comment modéliser des préférences ?

Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :



Comment modéliser des préférences ?

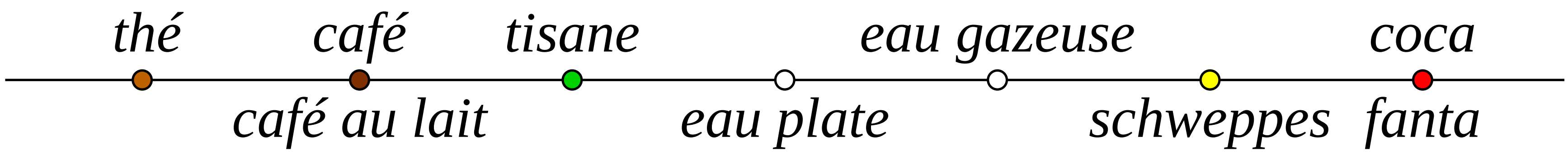
Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :



Soit $A = \{a, b, \ldots\}$ l'ensemble des *alternatives*.
On écrit aPb si a est préféré (ou équivalent) à b.

Comment modéliser des préférences ?

Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :

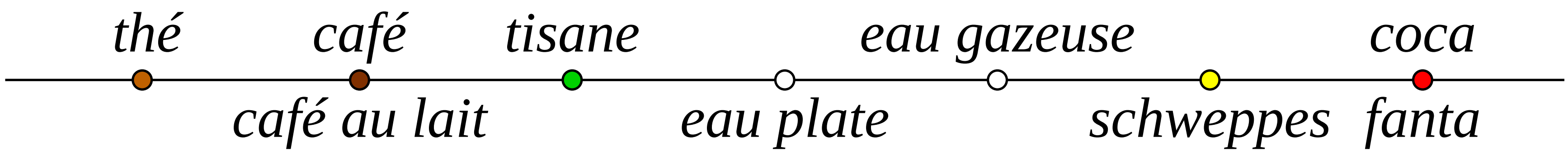


Soit $A = \{a, b, \ldots\}$ l'ensemble des *alternatives*.
On écrit aPb si a est préféré (ou équivalent) à b.

Axiome de transitivité : On exige que P soit
transitif : aPb et bPc impliquent aPc,
linéaire : pour tout $a, b \in A$ on a aPb ou bPa.

Comment modéliser des préférences ?

Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :



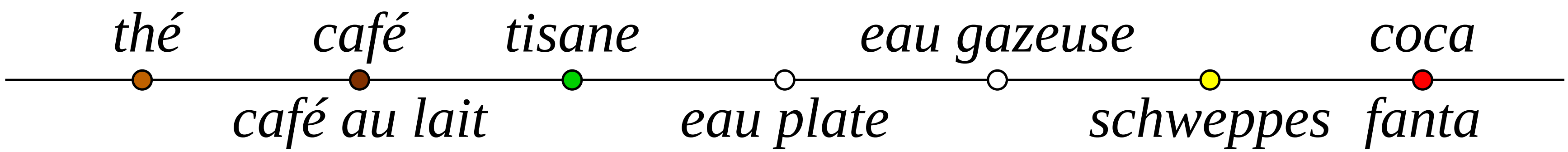
Soit $A = \{a, b, \ldots\}$ l'ensemble des *alternatives*.
On écrit aPb si a est préféré (ou équivalent) à b.

Axiome de transitivité : On exige que P soit
transitif : aPb et bPc impliquent aPc,
linéaire : pour tout $a, b \in A$ on a aPb ou bPa.

Notation habituelle pour une relation d'ordre :
Préférence faible : $a \succcurlyeq b \quad :\Leftrightarrow \quad aPb$.

Comment modéliser des préférences ?

Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :



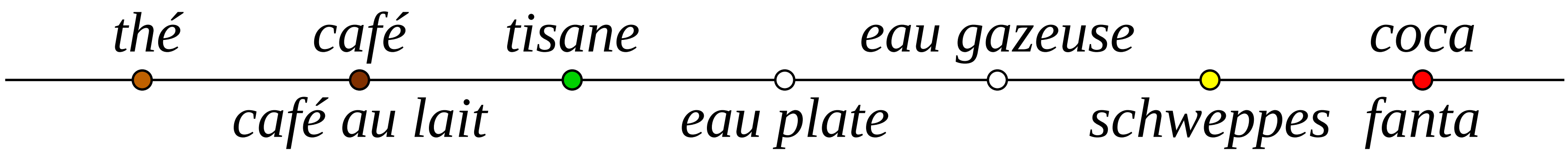
Soit $A = \{a, b, \ldots\}$ l'ensemble des *alternatives*.
On écrit aPb si a est préféré (ou équivalent) à b.

Axiome de transitivité : On exige que P soit
transitif : aPb et bPc impliquent aPc,
linéaire : pour tout $a, b \in A$ on a aPb ou bPa.

Notation habituelle pour une relation d'ordre :
Préférence faible : $a \succcurlyeq b \quad :\Leftrightarrow \quad aPb$.
Indifférence : $a \approx b \quad :\Leftrightarrow \quad aPb$ et bPa.

Comment modéliser des préférences ?

Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :



Soit $A = \{a, b, \dots\}$ l'ensemble des *alternatives*.
On écrit aPb si a est préféré (ou équivalent) à b.

Axiome de transitivité : On exige que P soit
transitif : aPb et bPc impliquent aPc,
linéaire : pour tout $a, b \in A$ on a aPb ou bPa.

Notation habituelle pour une relation d'ordre :
Préférence faible : $a \succcurlyeq b \quad :\Leftrightarrow \quad aPb$.
Indifférence : $a \approx b \quad :\Leftrightarrow \quad aPb$ et bPa.
Préférence stricte : $a \succ b \quad :\Leftrightarrow \quad aPb$ mais non bPa.

Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Au lieu d'un seul ordre de préférence on considère maintenant un ensemble I d'individus $1, 2, \ldots, n$ avec $n \geq 2$. On suppose que chaque individu i déclare son ordre de préférence P_i.

Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Au lieu d'un seul ordre de préférence on considère maintenant un ensemble I d'individus $1, 2, \ldots, n$ avec $n \geq 2$. On suppose que chaque individu i déclare son ordre de préférence P_i.

Problème : Comment en déduire un classement commun ?

Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Au lieu d'un seul ordre de préférence on considère maintenant un ensemble I d'individus $1, 2, \ldots, n$ avec $n \geq 2$. On suppose que chaque individu i déclare son ordre de préférence P_i.

Problème : Comment en déduire un classement commun ?

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des ordres de préférences sur A.

Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Au lieu d'un seul ordre de préférence on considère maintenant un ensemble I d'individus $1, 2, \dots, n$ avec $n \geq 2$. On suppose que chaque individu i déclare son ordre de préférence P_i.

Problème : Comment en déduire un classement commun ?

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des ordres de préférences sur A.
Nous cherchons donc une application « raisonnable »

$$C \colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}, \quad (P_1, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Qu’est-ce qu’un mode de scrutin ?

Au lieu d’un seul ordre de préférence on considère maintenant un ensemble I d’individus $1,2,\ldots,n$ avec $n \geq 2$. On suppose que chaque individu i déclare son ordre de préférence P_i.

Problème : Comment en déduire un classement commun ?

On note $\mathbb{P}$ l’ensemble des ordres de préférences sur A.
Nous cherchons donc une application « raisonnable »

$$C\colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}, \quad (P_1,\ldots,P_n) \mapsto P.$$

On interprète C comme un *mode de scrutin*, ou une *constitution*, ou bien un algorithme pour construire un *compromis*.

L’axiome d’unanimité

L'axiome d'unanimité

Préférences individuelles

1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	a	$\succ$	c	$\succ$	b
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Quelles conclusions en tirer ?

L'axiome d'unanimité

Préférences individuelles					
$1:$	a	$\succ$	b	$\succ$	c
$2:$	a	$\succ$	c	$\succ$	b
$3:$	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Quelles conclusions en tirer ?

$$\begin{array}{lccccc} \text{possibles :} & a & \succ & b & \succ & c \\ & a & \succ & c & \succ & b \\ & c & \succ & a & \succ & b \end{array}$$

L’axiome d’unanimité

Préférences individuelles

1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	a	$\succ$	c	$\succ$	b
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Quelles conclusions en tirer ?

possibles :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
	a	$\succ$	c	$\succ$	b
	c	$\succ$	a	$\succ$	b
impossibles :	b	$\succ$	a	$\succ$	c
	b	$\succ$	c	$\succ$	a
	c	$\succ$	b	$\succ$	a

L'axiome d'unanimité

Préférences individuelles					
$1:$	a	$\succ$	b	$\succ$	c
$2:$	a	$\succ$	c	$\succ$	b
$3:$	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Quelles conclusions en tirer ?

Principe : Si tous les individus préfèrent a à b,
alors le classement commun doit préférer a à b.

L'axiome d'unanimité

Préférences individuelles					
$1:$	a	$\succ$	b	$\succ$	c
$2:$	a	$\succ$	c	$\succ$	b
$3:$	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Quelles conclusions en tirer ?

Principe : Si tous les individus préfèrent a à b,
alors le classement commun doit préférer a à b.

Axiome d'unanimité :
Soit $C(P_1,\ldots,P_n) = P$. Si $a \succ_i b$ pour tout $i \in I$, alors $a \succ b$.

L'axiome d'unanimité

Préférences individuelles					
1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	a	$\succ$	c	$\succ$	b
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Quelles conclusions en tirer ?

Principe : Si tous les individus préfèrent a à b,
alors le classement commun doit préférer a à b.

Axiome d'unanimité :
Soit $C(P_1, \ldots, P_n) = P$. Si $a \succ_i b$ pour tout $i \in I$, alors $a \succ b$.

☞ C'est aussi appelé l'axiome de *souveraineté* : le groupe I peut imposer, en cas d'unanimité, n'importe quel classement.

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Premier cas

Si $\quad a \succ b \succ c$ alors $\quad \ldots$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles	
$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Premier cas	
Si $\quad a \succ b \succ c$	alors $\quad a \succ' b \succ' c$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1:$	$a \succ b \succ c$	$1:$	$a \succ' b \succ' c$
$2:$	$a \succ c \succ b$	$2:$	$a \succ' c \succ' b$
$3:$	$c \succ a \succ b$	$3:$	$a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Premier cas

Si	$a \succ b \succ c$	alors	$a \succ' b \succ' c$
		impossible :	$a \succ' c \approx' b$
		impossible :	$a \succ' c \succ' b$
		impossible :	$a \approx' c \succ' b$
		impossible :	$c \succ' a \succ' b$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deuxième cas

Si $\quad a \succ c \succ b \qquad$ alors $\quad \dots$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles	
$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deuxième cas	
Si $\quad a \succ c \succ b$	alors $\quad a \succ' c \succ' b$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1:$	$a \succ b \succ c$	$1:$	$a \succ' b \succ' c$
$2:$	$a \succ c \succ b$	$2:$	$a \succ' c \succ' b$
$3:$	$c \succ a \succ b$	$3:$	$a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deuxième cas

Si	$a \succ c \succ b$	alors	$a \succ' c \succ' b$
		impossible :	$a \succ' b \succ' c$
		impossible :	$a \succ' c \approx' b$
		impossible :	$a \approx' c \succ' b$
		impossible :	$c \succ' a \succ' b$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Troisième cas

Si $c \succ a \succ b$ alors $\ldots$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Troisième cas

Si $\quad c \succ a \succ b$	alors $\quad a \succ' c \succ' b$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles	
$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Troisième cas			
Si	$c \succ a \succ b$	alors	$a \succ' c \succ' b$
		impossible :	$c \succ' a \succ' b$
		impossible :	$c \approx' a \succ' b$
		impossible :	$a \succ' c \approx' b$
		impossible :	$a \succ' b \succ' c$

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deux principes semblent naturels :

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deux principes semblent naturels :

Si les préférences entre a et b changent en faveur de a,
alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' c \succ' b$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deux principes semblent naturels :

Si les préférences entre a et b changent en faveur de a,
alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Si les préférences entre a et b ne changent pas du tout,
alors leur classement relatif ne change pas non plus.

L’axiome de monotonie

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Axiome de monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP_i'b\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP_i'a\}$.

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Axiome de monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
Soit $P = C(P_1, \ldots, P_n)$ et $P' = C(P'_1, \ldots, P'_n)$. Si aPb alors $aP'b$.

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Axiome de monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP_i'b\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP_i'a\}$.
Soit $P = C(P_1, \ldots, P_n)$ et $P' = C(P_1', \ldots, P_n')$. Si aPb alors $aP'b$.

☞ Corrélation positive entre préférences individuelles et classement commun.

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Axiome de monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP_i'b\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP_i'a\}$.
Soit $P = C(P_1, \ldots, P_n)$ et $P' = C(P_1', \ldots, P_n')$. Si aPb alors $aP'b$.

☞ Corrélation positive entre préférences individuelles et classement commun.

Cas particulier :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} = \{i \mid aP_i'b\}$ et $\{i \mid bP_ia\} = \{i \mid bP_i'a\}$.
Alors $aPb \iff aP'b$.

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b.

Axiome de monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
Soit $P = C(P_1, \ldots, P_n)$ et $P' = C(P'_1, \ldots, P'_n)$. Si aPb alors $aP'b$.

☞ Corrélation positive entre préférences individuelles et classement commun.

Cas particulier :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} = \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} = \{i \mid bP'_ia\}$.
Alors $aPb \iff aP'b$.

☞ Indépendance des alternatives non pertinentes.

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$$\begin{array}{llll} 1: & a \succ b \succ c & \qquad 1: & a \succ' b \succ' c \\ 2: & a \succ c \succ b & \qquad 2: & a \succ' b \succ' c \\ 3: & c \succ a \succ b & \qquad 3: & c \succ' a \succ' b \end{array}$$

Quelles conclusions en tirer ?

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' b \succ' c$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Premier cas

Si $a \succ b \succ c$ alors $\ldots$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' b \succ' c$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Premier cas

Si $\quad a \succ b \succ c$	alors $\quad a \succ' b \succ' c$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1:$	$a \succ b \succ c$	$1:$	$a \succ' b \succ' c$
$2:$	$a \succ c \succ b$	$2:$	$a \succ' b \succ' c$
$3:$	$c \succ a \succ b$	$3:$	$c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Premier cas

Si	$a \succ b \succ c$	alors	$a \succ' b \succ' c$
		impossible :	$a \succ' b \approx' c$
		impossible :	$a \succ' c \succ' b$
		impossible :	$a \approx' c \succ' b$
		impossible :	$c \succ' a \succ' b$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' b \succ' c$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deuxième cas

Si $\quad a \succ c \succ b$	alors $\quad \ldots$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1:$	$a \succ b \succ c$	$1:$	$a \succ' b \succ' c$
$2:$	$a \succ c \succ b$	$2:$	$a \succ' b \succ' c$
$3:$	$c \succ a \succ b$	$3:$	$c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deuxième cas

Si	$a \succ c \succ b$	alors	$a \succ' c \succ' b$
		ou	$a \succ' c \approx' b$
		ou	$a \succ' b \succ' c$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1:$	$a \succ b \succ c$	$1:$	$a \succ' b \succ' c$
$2:$	$a \succ c \succ b$	$2:$	$a \succ' b \succ' c$
$3:$	$c \succ a \succ b$	$3:$	$c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deuxième cas

Si	$a \succ c \succ b$	alors	$a \succ' c \succ' b$
		ou	$a \succ' c \approx' b$
		ou	$a \succ' b \succ' c$
		impossible :	$a \approx' c \succ' b$
		impossible :	$c \succ' a \succ' b$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1: \quad a \succ b \succ c$	$1: \quad a \succ' b \succ' c$
$2: \quad a \succ c \succ b$	$2: \quad a \succ' b \succ' c$
$3: \quad c \succ a \succ b$	$3: \quad c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Troisième cas

Si $\quad c \succ a \succ b \qquad$ alors $\quad \ldots$

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

$1:$	$a \succ b \succ c$	$1:$	$a \succ' b \succ' c$
$2:$	$a \succ c \succ b$	$2:$	$a \succ' b \succ' c$
$3:$	$c \succ a \succ b$	$3:$	$c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Troisième cas

Si	$c \succ a \succ b$	alors	$c \succ' a \succ' b$
		ou	$a \approx' c \succ' b$
		ou	$a \succ' c \succ' b$
		ou	$a \succ' c \approx' b$
		ou	$a \succ' b \succ' c$

Constitutions dictatoriales

Soit $j \in I$. On définit $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ par $C(P_1,\dots,P_n) = P_j$.
Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie …

Constitutions dictatoriales

Soit $j \in I$. On définit $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ par $C(P_1, \ldots, P_n) = P_j$.
Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie …

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ_j b$, donc $a \succ b$.

Constitutions dictatoriales

Soit $j \in I$. On définit $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ par $C(P_1, \ldots, P_n) = P_j$.
Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie …

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ_j b$, donc $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
On a $aPb \iff aP_jb \implies aP'_jb \iff aP'b$.

Constitutions dictatoriales

Soit $j \in I$. On définit $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ par $C(P_1, \ldots, P_n) = P_j$.
Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ_j b$, donc $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
On a $aPb \iff aP_jb \implies aP'_jb \iff aP'b$.

Définition : Une constitution $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ est *dictatoriale* s'il existe $j \in I$ tel que $a \succ_j b$ implique $a \succ b$ quels que soient $a, b \in A$.

Constitutions dictatoriales

Soit $j \in I$. On définit $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ par $C(P_1,\dots,P_n) = P_j$.
Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ_j b$, donc $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
On a $aPb \iff aP_jb \implies aP'_jb \iff aP'b$.

Définition : Une constitution $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ est *dictatoriale* s'il existe $j \in I$ tel que $a \succ_j b$ implique $a \succ b$ quels que soient $a, b \in A$.

☞ Un tel mode de scrutin ne vérifie pas **l'axiome de symétrie :** $C(P_1,\dots,P_n) = C(P_{\pi 1},\dots,P_{\pi n})$ pour toute permutation π.

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_ib\} \geq \#\{i \mid bP_ia\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie ...

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_ib\} \geq \#\{i \mid bP_ia\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ b$.

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_ib\} \geq \#\{i \mid bP_ia\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
Alors $aPb \Rightarrow aP'b$.

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_ib\} \geq \#\{i \mid bP_ia\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
Alors $aPb \Rightarrow aP'b$.

Généralisation : On fixe une mesure $\mu \colon I \to \mathbb{R}_+$ avec $\sum_i \mu(i) = 1$, puis on compare $\sum_{i \mid aP_ib} \mu(i)$ à $\sum_{i \mid bP_ia} \mu(i)$ (vote pondéré).

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_ib\} \geq \#\{i \mid bP_ia\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie . . .

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP'_ib\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP'_ia\}$.
Alors $aPb \Rightarrow aP'b$.

Généralisation : On fixe une mesure $\mu\colon I \to \mathbb{R}_+$ avec $\sum_i \mu(i) = 1$, puis on compare $\sum_{i|aP_ib} \mu(i)$ à $\sum_{i|bP_ia} \mu(i)$ (vote pondéré).

☞ Brise la symétrie mais respecte l'unanimité et la monotonie.

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_ib\} \geq \#\{i \mid bP_ia\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i, alors $a \succ b$.

Monotonie :
Supposons $\{i \mid aP_ib\} \subseteq \{i \mid aP_i'b\}$ et $\{i \mid bP_ia\} \supseteq \{i \mid bP_i'a\}$.
Alors $aPb \Rightarrow aP'b$.

Généralisation : On fixe une mesure $\mu \colon I \to \mathbb{R}_+$ avec $\sum_i \mu(i) = 1$, puis on compare $\sum_{i|aP_ib} \mu(i)$ à $\sum_{i|bP_ia} \mu(i)$ (vote pondéré).

- ☞ Brise la symétrie mais respecte l'unanimité et la monotonie.
- ☞ Le cas extrême $\mu = \delta_j$ revient à une constitution dictatoriale.

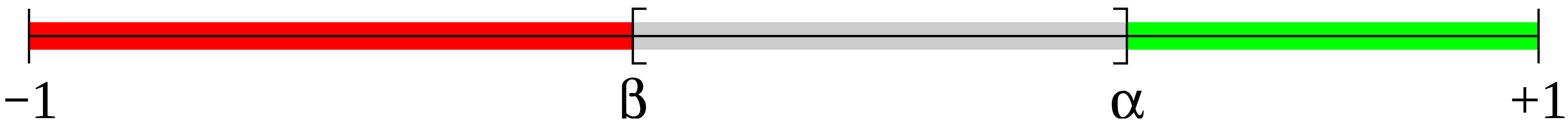
Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Selon la différence $v = \mu\{i \mid aP_ib\} - \mu\{i \mid bP_ia\}$ on pose :

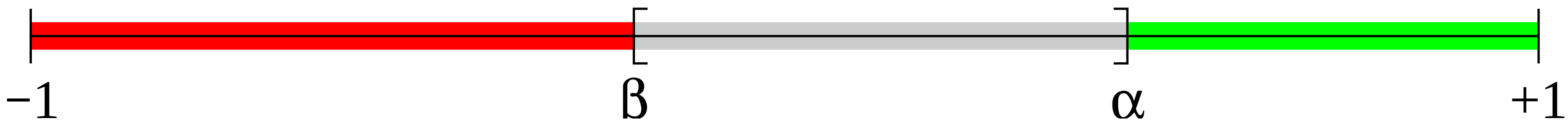


$b \succ a$ si $v < \beta$, $a \approx b$ si $\beta \leq v \leq \alpha$, $a \succ b$ si $v > \alpha$.

Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Selon la différence $v = \mu\{i \mid aP_ib\} - \mu\{i \mid bP_ia\}$ on pose :



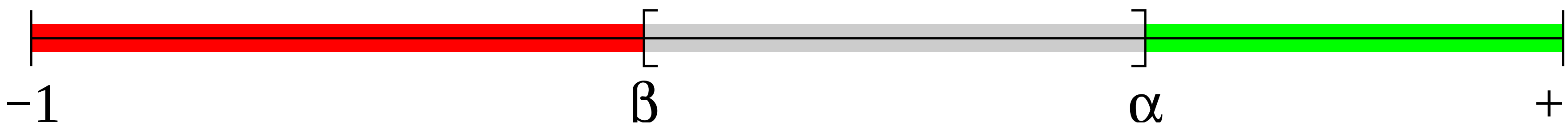
$b \succ a$ si $v < \beta$, $a \approx b$ si $\beta \leq v \leq \alpha$, $a \succ b$ si $v > \alpha$.

☞ Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie.

Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Selon la différence $v = \mu\{i \mid aP_ib\} - \mu\{i \mid bP_ia\}$ on pose :



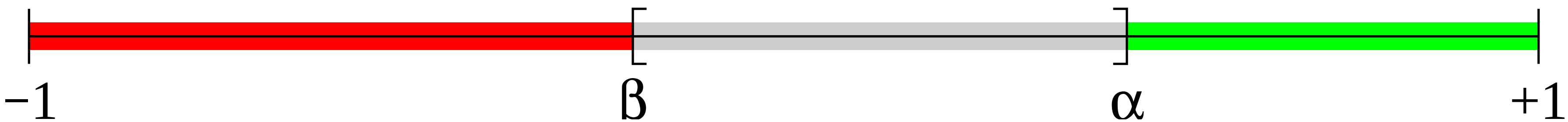
$b \succ a$ si $v < \beta$, $a \approx b$ si $\beta \leq v \leq \alpha$, $a \succ b$ si $v > \alpha$.

- ☞ Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie.
- ☞ Pour $\alpha = \beta = 0$ on obtient le vote par majorité simple.

Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Selon la différence $v = \mu\{i \mid aP_ib\} - \mu\{i \mid bP_ia\}$ on pose :



$b \succ a$ si $v < \beta$, $a \approx b$ si $\beta \leq v \leq \alpha$, $a \succ b$ si $v > \alpha$.

☞ Ce mode de scrutin respecte l’unanimité et la monotonie.

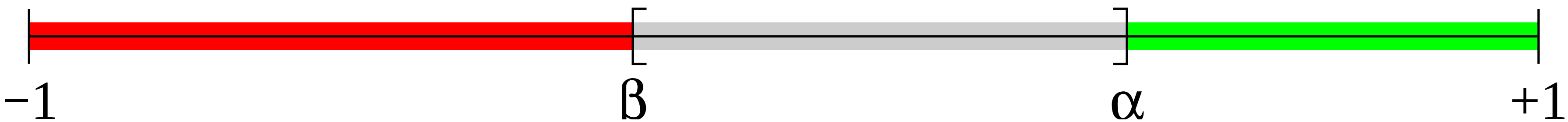
☞ Pour $\alpha = \beta = 0$ on obtient le vote par majorité simple.

☞ Possiblement α et β ne sont pas symétriques.

Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Selon la différence $v = \mu\{i \mid aP_ib\} - \mu\{i \mid bP_ia\}$ on pose :



$b \succ a$ si $v < \beta$, $a \approx b$ si $\beta \leq v \leq \alpha$, $a \succ b$ si $v > \alpha$.

- ☞ Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie.
- ☞ Pour $\alpha = \beta = 0$ on obtient le vote par majorité simple.
- ☞ Possiblement α et β ne sont pas symétriques.

À titre d'illustration supposons que $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Dans ce cas une partie $J \subset I$ avec $\mu(J) = \frac{1}{2}$ ne peut pas imposer $a \succ b$, mais elle peut imposer $b \succ a$. Elle est en position de « veto ».

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a, b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a,b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a,b) ssi elle impose sa préférence dans la constellation suivante :

$$\begin{array}{rccc} J: & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & a \end{array}$$

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a, b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \smallsetminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a, b) ssi elle impose sa préférence dans la constellation suivante :

$$\begin{array}{rccc} J: & a & \succ & b \\ I \smallsetminus J: & b & \succ & a \end{array}$$

☞ Par unanimité, I est décisif pour tout couple (a, b).

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a,b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a,b) ssi elle impose sa préférence dans la constellation suivante :

$$\begin{array}{rccc} J: & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & a \end{array}$$

☞ Par unanimité, I est décisif pour tout couple (a,b).
L'ensemble vide ne peut pas être décisif.

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a,b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \smallsetminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a,b) ssi elle impose sa préférence dans la constellation suivante :

$$\begin{array}{rccc} J: & a & \succ & b \\ I \smallsetminus J: & b & \succ & a \end{array}$$

☞ Par unanimité, I est décisif pour tout couple (a,b).
L'ensemble vide ne peut pas être décisif.

☞ Dans un vote majoritaire, J est décisive ssi $\mu(J) > \frac{1}{2}$.

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a, b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a, b) ssi elle impose sa préférence dans la constellation suivante :

$$
\begin{array}{rccc}
J: & a & \succ & b \\
I \setminus J: & b & \succ & a
\end{array}
$$

- ☞ Par unanimité, I est décisif pour tout couple (a, b).
  L'ensemble vide ne peut pas être décisif.
- ☞ Dans un vote majoritaire, J est décisive ssi $\mu(J) > \frac{1}{2}$.
  En général, il y a plusieurs parties décisives [minimales].

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a,b) si elle peut imposer $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a,b) ssi elle impose sa préférence dans la constellation suivante :

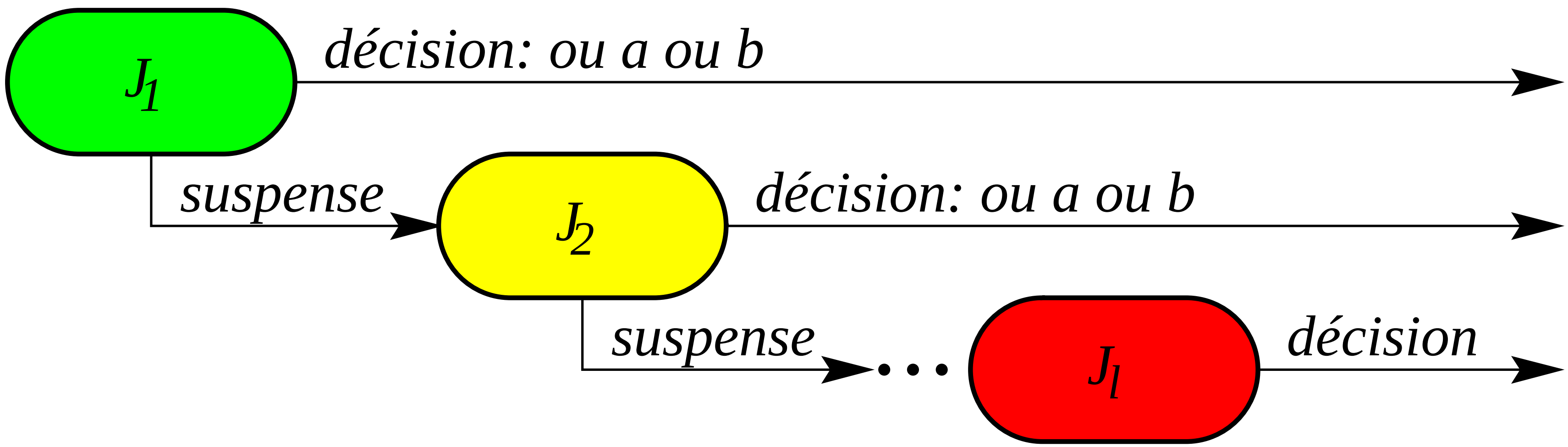
$$\begin{array}{rccc} J: & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & a \end{array}$$

- ☞ Par unanimité, I est décisif pour tout couple (a,b). L'ensemble vide ne peut pas être décisif.
- ☞ Dans un vote majoritaire, J est décisive ssi $\mu(J) > \frac{1}{2}$. En général, il y a plusieurs parties décisives [minimales].
- ☞ Dans une dictature, J est décisive ssi elle contient le dictateur j. Ici la partie décisive minimale est $\{j\}$.

Exemple : scrutin en cascade

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

On choisit des parties non vides $J_1, J_2, \dots, J_\ell \subset I$ ainsi qu'un mode de scrutin $C_k \colon \mathbb{P}^{J_k} \longrightarrow \mathbb{P}$ pour tout $k = 1, 2, \dots, \ell$.



☞ Si tous les modes de scrutin C_k respectent l'unanimité et la monotonie, alors le scrutin en cascade les respectent aussi.

Marquis Antoine de Condorcet (1743–1794)

Philosophe, mathématicien et homme politique, nommé à l'Académie des Sciences (1769), élu à l'Académie française (1782), il collabora à l'*Encyclopédie* (1784-89). Député à l'Assemblée législative (1791), puis à la Convention (1792). Défenseur de nombreuses causes libérales, il participa à la rédaction de la Constitution.

1765 : Essai sur le calcul intégral, 1767 : Du problème des trois corps, 1768 : Essais d'analyse, 1781–1784 : Mémoire sur le calcul des probabilités, 1784 : Réflexions sur l'esclavage des nègres, 1790 : Essai sur l'admission des femmes au droit de cité.

Petite histoire : Quand les Jacobins introduisirent la constitution de 1793, très différente des propositions de Condorcet, celui-ci la critiqua, ce qui le fit condamner pour trahison. Il se cacha durant 8 mois. Arrêté, il meurt dans une prison dans des circonstances obscures.

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

$$\begin{array}{lccccc} 1: & a & \succ & b & \succ & c \\ 2: & b & \succ & c & \succ & a \\ 3: & c & \succ & a & \succ & b \end{array}$$

Que donne le vote paire par paire ?

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

$$\begin{array}{lccccc} 1: & a & \succ & b & \succ & c \\ 2: & b & \succ & c & \succ & a \\ 3: & c & \succ & a & \succ & b \end{array}$$

Que donne le vote paire par paire ?

- 1 et 3 soutiennent $a \succ b$ tandis que 2 est contre.

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Que donne le vote paire par paire ?

- ✌ 1 et 3 soutiennent $a \succ b$ tandis que 2 est contre.
- ✌ 1 et 2 soutiennent $b \succ c$ tandis que 3 est contre.

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Que donne le vote paire par paire ?

- ✌ 1 et 3 soutiennent $a \succ b$ tandis que 2 est contre.
- ✌ 1 et 2 soutiennent $b \succ c$ tandis que 3 est contre.
- ✌ 2 et 3 soutiennent $c \succ a$ tandis que 1 est contre.

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Que donne le vote paire par paire ?

- 1 et 3 soutiennent $a \succ b$ tandis que 2 est contre.
- 1 et 2 soutiennent $b \succ c$ tandis que 3 est contre.
- 2 et 3 soutiennent $c \succ a$ tandis que 1 est contre.

Conclusion : $a \succ b \succ c \succ a$!!!

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

1 :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
2 :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
3 :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Que donne le vote paire par paire ?

- 1 et 3 soutiennent $a \succ b$ tandis que 2 est contre.
- 1 et 2 soutiennent $b \succ c$ tandis que 3 est contre.
- 2 et 3 soutiennent $c \succ a$ tandis que 1 est contre.

Conclusion : $a \succ b \succ c \succ a$! ! !

Problème : possibilité de contradictions / préférences circulaires !
Peut-on construire un mode de scrutin qui évite ce problème ?

Kenneth J. Arrow (1921–)

Économiste de formation mathématique, professeur à Stanford (1949–1968 et 1980–présent) et Harvard (1968–79). Prix Nobel d'économie en 1972 pour ses études sur les choix collectifs.

1948 : Cowles Commission Memorandum

1951 : Social choice and individual values

1986 : Social choice and multicriterion decision-making

Petite histoire : Au début de la guerre froide il participa aux recherches stratégiques des États Unis. Il fut demandé de construire un mode de scrutin *optimal*, qui en particulier résolve le paradoxe de Condorcet. « It took about five days to write in September 1948. When every attempt failed, I thought of the impossibility theorem. »

Le théorème du dictateur

Théorème d'impossibilité (K.J. Arrow, 1948)
Supposons que l'ensemble A contient au moins trois alternatives. Alors il n'existe pas de constitution $C\colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ qui vérifie à la fois les trois axiomes d'unanimité, de monotonie, et de symétrie.

Le théorème du dictateur

Théorème d'impossibilité (K.J. Arrow, 1948)
Supposons que l'ensemble A contient au moins trois alternatives. Alors il n'existe pas de constitution $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ qui vérifie à la fois les trois axiomes d'unanimité, de monotonie, et de symétrie.

Plus précisément : toute constitution $C\colon \mathbb{P}^I \longrightarrow \mathbb{P}$ vérifiant les deux axiomes d'unanimité et de monotonie est dictatoriale !

Le théorème du dictateur

Théorème d'impossibilité (K.J. Arrow, 1948)
Supposons que l'ensemble A contient au moins trois alternatives. Alors il n'existe pas de constitution $C\colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ qui vérifie à la fois les trois axiomes d'unanimité, de monotonie, et de symétrie.

Plus précisément : toute constitution $C\colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ vérifiant les deux axiomes d'unanimité et de monotonie est dictatoriale !

— $*$ —

Approche : Dans toute la suite on fixe une constitution $C\colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ dont on exige les axiomes d'unanimité et de monotonie.

Le théorème du dictateur

Théorème d'impossibilité (K.J. Arrow, 1948)
Supposons que l'ensemble A contient au moins trois alternatives.
Alors il n'existe pas de constitution $C \colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ qui vérifie à la fois les trois axiomes d'unanimité, de monotonie, et de symétrie.

Plus précisément : toute constitution $C \colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ vérifiant les deux axiomes d'unanimité et de monotonie est dictatoriale !

— $*$ —

Approche : Dans toute la suite on fixe une constitution $C \colon \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ dont on exige les axiomes d'unanimité et de monotonie.

La preuve procède en deux étapes :
On analysera d'abord les parties décisives,
puis on démasquera le dictateur . . .

Décisif implique tout-puissant

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a, b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a, b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité,

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive,

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc}
J: & x & \succ & a & \succ & b \\
I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a
\end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité.

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$J:$	x	$\succ$	a	$\succ$	b
$I \setminus J:$	b	$\succ$	x	$\succ$	a

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

$J:$	a	$\succ$	b	$\succ$	y
$I \setminus J:$	b	$\succ$	y	$\succ$	a

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

$$\begin{array}{rccccc} J: & a & \succ & b & \succ & y \\ I \setminus J: & b & \succ & y & \succ & a \end{array}$$

On a $a \succ b$ car J est décisive,

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

$$\begin{array}{rccccc} J: & a & \succ & b & \succ & y \\ I \setminus J: & b & \succ & y & \succ & a \end{array}$$

On a $a \succ b$ car J est décisive, puis $b \succ y$ par unanimité,

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

$$\begin{array}{rccccc} J: & a & \succ & b & \succ & y \\ I \setminus J: & b & \succ & y & \succ & a \end{array}$$

On a $a \succ b$ car J est décisive, puis $b \succ y$ par unanimité, donc $a \succ y$ par transitivité.

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a,b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

$$\begin{array}{rccccc} J: & a & \succ & b & \succ & y \\ I \setminus J: & b & \succ & y & \succ & a \end{array}$$

On a $a \succ b$ car J est décisive, puis $b \succ y$ par unanimité, donc $a \succ y$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (a,y).

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a, b). Regardons la constellation

$$\begin{array}{rccccc} J: & x & \succ & a & \succ & b \\ I \setminus J: & b & \succ & x & \succ & a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x, b).

$$\begin{array}{rccccc} J: & a & \succ & b & \succ & y \\ I \setminus J: & b & \succ & y & \succ & a \end{array}$$

On a $a \succ b$ car J est décisive, puis $b \succ y$ par unanimité, donc $a \succ y$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (a, y).

Conclusion : J est décisive pour toute paire (x, y).

Démonstration du théorème

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc}
j: & a & \succ & z & \succ & b \\
J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\
I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc}
j: & a & \succ & z & \succ & b \\
J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\
I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

J est décisive pour (a, z). Elle impose donc $a \succ z$.

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc} j: & a & \succ & z & \succ & b \\ J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\ I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

J est décisive pour (a, z). Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b, z).

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc}
j: & a & \succ & z & \succ & b \\
J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\
I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

J est décisive pour (a,z). Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b,z). Ceci contredirait la minimalité. On a donc $z \succcurlyeq b$.

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc}
j: & a & \succ & z & \succ & b \\
J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\
I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

J est décisive pour (a,z). Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b,z).
Ceci contredirait la minimalité. On a donc $z \succcurlyeq b$.

Par transitivité $a \succ z$ et $z \succcurlyeq b$ entraînent $a \succ b$.

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc}
j: & a & \succ & z & \succ & b \\
J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\
I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

J est décisive pour (a,z). Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b,z). Ceci contredirait la minimalité. On a donc $z \succcurlyeq b$.

Par transitivité $a \succ z$ et $z \succcurlyeq b$ entraînent $a \succ b$.

D'autre part, j seul préfère a à b.

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{rccccc} j: & a & \succ & z & \succ & b \\ J \setminus j: & b & \succ & a & \succ & z \\ I \setminus J: & z & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

J est décisive pour (a, z). Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b, z). Ceci contredirait la minimalité. On a donc $z \succcurlyeq b$.

Par transitivité $a \succ z$ et $z \succcurlyeq b$ entraînent $a \succ b$.

D'autre part, j seul préfère a à b. Il est donc décisif pour (a, b).

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

j :	a	$\succ$	z	$\succ$	b
$J \setminus j$:	b	$\succ$	a	$\succ$	z
$I \setminus J$:	z	$\succ$	b	$\succ$	a

J est décisive pour (a,z). Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b,z).
Ceci contredirait la minimalité. On a donc $z \succcurlyeq b$.

Par transitivité $a \succ z$ et $z \succcurlyeq b$ entraînent $a \succ b$.

D'autre part, j seul préfère a à b. Il est donc décisif pour (a,b).
Par notre hypothèse de minimalité on conclut que $J = \{j\}$.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Le théorème d’impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n’existe pas de mode de scrutin optimal.

Conclusion et perspectives

Le théorème d’impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n’existe pas de mode de scrutin optimal.

Si l’on ne veut pas accepter cette conclusion, il faut d’abord **vérifier la preuve**. (Exercice bénéfique !)

Conclusion et perspectives

Le théorème d'impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n'existe pas de mode de scrutin optimal.

Si l'on ne veut pas accepter cette conclusion, il faut d'abord **vérifier la preuve**. (Exercice bénéfique !)

Vérification faite, on va **revenir sur la modélisation** !

Conclusion et perspectives

Le théorème d'impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n'existe pas de mode de scrutin optimal.

Si l'on ne veut pas accepter cette conclusion, il faut d'abord **vérifier la preuve**. (Exercice bénéfique !)

Vérification faite, on va **revenir sur la modélisation** !

☞ Modifier/remplacer l'axiome de monotonie ? Comment ?

Conclusion et perspectives

Le théorème d'impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n'existe pas de mode de scrutin optimal.

Si l'on ne veut pas accepter cette conclusion, il faut d'abord **vérifier la preuve**. (Exercice bénéfique !)

Vérification faite, on va **revenir sur la modélisation** !

- ☞ Modifier/remplacer l'axiome de monotonie ? Comment ?
- ☞ Définir $C\colon X \to \mathbb{P}$ sur une partie $X \subset \mathbb{P}^I$? Laquelle ?

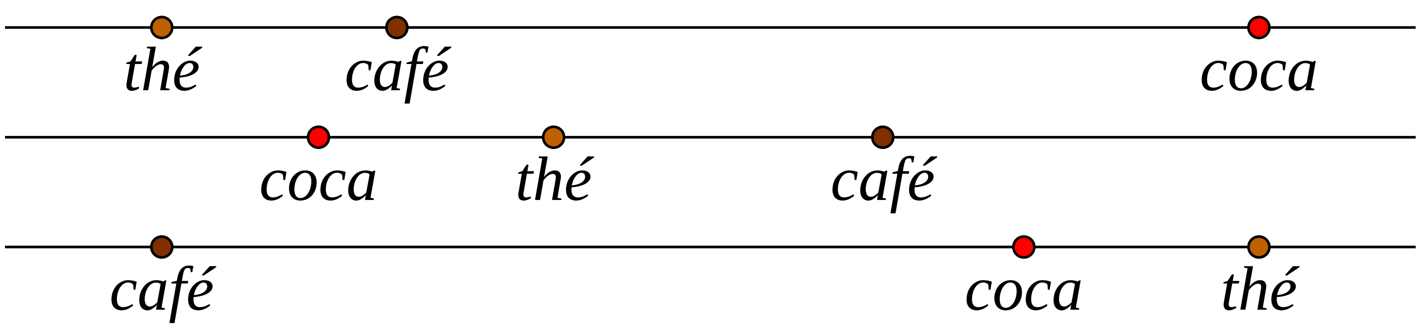
Conclusion et perspectives

Le théorème d'impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n'existe pas de mode de scrutin optimal.

Si l'on ne veut pas accepter cette conclusion, il faut d'abord **vérifier la preuve**. (Exercice bénéfique !)

Vérification faite, on va **revenir sur la modélisation** !

- ☞ Modifier/remplacer l'axiome de monotonie ? Comment ?
- ☞ Définir $C: X \to \mathbb{P}$ sur une partie $X \subset \mathbb{P}^I$? Laquelle ?
- ☞ Formuler les préférences sur l'axe réel ? A-ce un sens ? Mésurer l'intensité ? Comparaison inter-personnelle ?



Références bibliographiques

- K.J. Arrow : *Social choice and individual values*, John Wiley & Sons, New York 1951. (Élaboration de sa thèse.)
- K.J. Arrow : *Social choice and multicriterion decision-making*, MIT Press, Cambridge 1986. (Reprend la question initiale et discute de nombreux développements ultérieurs.)
- R.D. Luce, H. Raiffa : *Games and decisions*, John Wiley & Sons, New York 1957 ; Dover Publications, New York 1989. (Le chapitre 14 discute le théorème d'impossibilité d'Arrow.)
- S. Nasar : *A beautiful mind*, Faber & Faber, London, 1998. (Voir le chapitre 12, qui traite de la RAND Corporation.)
- Quant aux prix Nobel voir `http://nobelprize.org`

Je vous remercie de votre attention !