

Le théorème du dictateur

Séminaire Mathématiques et Applications

Dans la série « comment écrire une thèse en une semaine
puis décrocher le prix Nobel d'économie »

Michael Eisermann

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/



Institut Fourier, 24 février 2005

- ① La problématique générale :
Comment se mettre d'accord dans un groupe ?



- ② Modélisation mathématique : l'approche axiomatique.
- ③ Trois axiomes : transitivité, unanimité, monotonie.
- ④ Deux exemples : dictature et scrutin majoritaire.
- ⑤ Le paradoxe de Condorcet (≈ 1789).
- ⑥ Le théorème d'Arrow (1948).

Comment déterminer un « choix social » ?

Problématique :

Comment trouver un compromis entre priorités divergentes ?
Comment construire un mode de scrutin qui soit « optimal » ?

Exemple : Soit $I = \{1, 2, 3, 4\}$ un groupe d'étudiants. Afin de préparer leurs examens ensemble, ils veulent se mettre d'accord sur les priorités : a = algèbre, b = intégration, c = calcul diff.

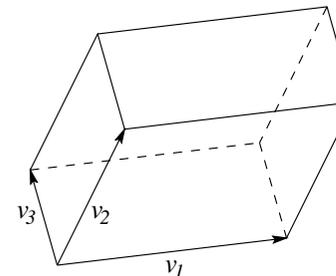
Chacun des étudiants a ses préférences individuelles :

1 :	b	\succ	a	\succ	c
2 :	a	\succ	c	\succ	b
3 :	a	\approx	b	\succ	c
4 :	c	\succ	b	\succ	a

Comment trouver un compromis « raisonnable » ?

Une analogie tirée par les cheveux

Comment définir le volume d'un parallélépipède ?



$$\text{vol}(v_1, v_2, v_3) = ?$$

Idée : on cherche

$$\text{vol} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

ou plus généralement

$$\text{vol}_n : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ qui soit}$$

homogène : $\text{vol}(\dots, \lambda v_i, \dots) = \lambda \text{vol}(\dots, v_i, \dots)$

additif : $\text{vol}(\dots, v_i + v'_i, \dots) = \text{vol}(\dots, v_i, \dots) + \text{vol}(\dots, v'_i, \dots)$

alterné : Si $v_i = v_j$ pour $i \neq j$, alors $\text{vol}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = 0$.

normé : Pour le cube unitaire on exige $\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Le théorème du déterminant

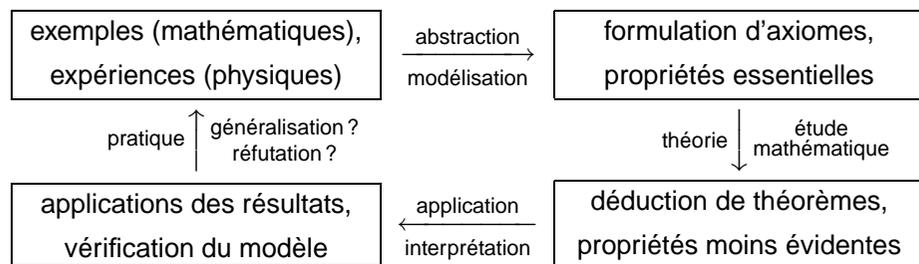
Définition :

On appelle *déterminant* toute application $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit multilinéaire, alternée, normée.

Théorème :

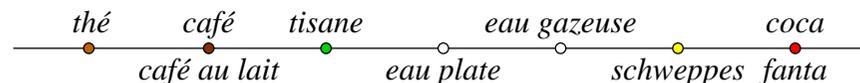
Il existe un et un seul déterminant $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$.

☞ Formules, algorithmes, applications, généralisations, ...



Comment modéliser des préférences ?

Un *ordre de préférence* est un classement linéaire :



Soit $A = \{a, b, \dots\}$ l'ensemble des *alternatives*.
On écrit aPb si a est préféré (ou équivalent) à b .

Axiome de transitivité : On exige que P soit
transitif : aPb et bPc impliquent aPc ,
linéaire : pour tout $a, b \in A$ on a aPb ou bPa .

Notation habituelle pour une relation d'ordre :
Préférence faible : $a \succsim b \Leftrightarrow aPb$.
Indifférence : $a \approx b \Leftrightarrow aPb$ et bPa .
Préférence stricte : $a \succ b \Leftrightarrow aPb$ mais non bPa .

Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Au lieu d'un seul ordre de préférence on considère maintenant un ensemble I d'individus $1, 2, \dots, n$ avec $n \geq 2$. On suppose que chaque individu i déclare son ordre de préférence P_i .

Problème : Comment en déduire un classement commun ?

On note \mathbb{P} l'ensemble des ordres de préférences sur A .
Nous cherchons donc une application « raisonnable »

$$C: \mathbb{P}^I \rightarrow \mathbb{P}, \quad (P_1, \dots, P_n) \mapsto P.$$

On interprète C comme un *mode de scrutin*, ou une *constitution*,
ou bien un algorithme pour construire un *compromis*.

L'axiome d'unanimité

Préférences individuelles			
1 :	a	\succ	$b \succ c$
2 :	a	\succ	$c \succ b$
3 :	c	\succ	$a \succ b$

Quelles conclusions en tirer ?

Principe : Si tous les individus préfèrent a à b ,
alors le classement commun doit préférer a à b .

Axiome d'unanimité :
Soit $C(P_1, \dots, P_n) = P$. Si $a \succ_i b$ pour tout $i \in I$, alors $a \succ b$.

☞ C'est aussi appelé l'axiome de *souveraineté* : le groupe I
peut imposer, en cas d'unanimité, n'importe quel classement.

Monotonie – 1er exemple

Deux jeux de préférences individuelles

1: $a \succ b \succ c$	1: $a \succ' b \succ' c$
2: $a \succ c \succ b$	2: $a \succ' c \succ' b$
3: $c \succ a \succ b$	3: $a \succ' c \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Deux principes semblent naturels :

Si les préférences entre a et b changent en faveur de a , alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b .

Si les préférences entre a et b ne changent pas du tout, alors leur classement relatif ne change pas non plus.

L'axiome de monotonie

Principe : Si les préférences entre a et b changent en faveur de a , alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de b .

Axiome de monotonie :

Supposons $\{i \mid aP_i b\} \subseteq \{i \mid aP'_i b\}$ et $\{i \mid bP_i a\} \supseteq \{i \mid bP'_i a\}$.
Soit $P = C(P_1, \dots, P_n)$ et $P' = C(P'_1, \dots, P'_n)$. Si aPb alors $aP'b$.

☞ Corrélation positive entre préférences individuelles et classement commun.

Cas particulier :

Supposons $\{i \mid aP_i b\} = \{i \mid aP'_i b\}$ et $\{i \mid bP_i a\} = \{i \mid bP'_i a\}$.
Alors $aPb \iff aP'b$.

☞ Indépendance des alternatives non pertinentes.

Monotonie – 2nd exemple

Deux jeux de préférences individuelles

1: $a \succ b \succ c$	1: $a \succ' b \succ' c$
2: $a \succ c \succ b$	2: $a \succ' b \succ' c$
3: $c \succ a \succ b$	3: $c \succ' a \succ' b$

Quelles conclusions en tirer ?

Troisième cas

Si $c \succ a \succ b$	alors $c \succ' a \succ' b$
	ou $a \succ' c \succ' b$
	ou $a \succ' c \succ' b$
	ou $a \succ' c \succ' b$
	ou $a \succ' b \succ' c$

Constitutions dictatoriales

Soit $j \in I$. On définit $C: \mathbb{P}^I \rightarrow \mathbb{P}$ par $C(P_1, \dots, P_n) = P_j$.

Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i , alors $a \succ_j b$, donc $a \succ b$.

Monotonie :

Supposons $\{i \mid aP_i b\} \subseteq \{i \mid aP'_i b\}$ et $\{i \mid bP_i a\} \supseteq \{i \mid bP'_i a\}$.
On a $aPb \iff aP_j b \implies aP'_j b \iff aP'b$.

Définition : Une constitution $C: \mathbb{P}^I \rightarrow \mathbb{P}$ est *dictatoriale* s'il existe $j \in I$ tel que $a \succ_j b$ implique $a \succ b$ quels que soient $a, b \in A$.

☞ Un tel mode de scrutin ne vérifie pas l'**axiome de symétrie** :
 $C(P_1, \dots, P_n) = C(P_{\pi 1}, \dots, P_{\pi n})$ pour toute permutation π .

Scrutin par majorité

Supposons que $A = \{a, b\}$ ne contient que **deux** alternatives.

On pose aPb si et seulement si $\#\{i \mid aP_i b\} \geq \#\{i \mid bP_i a\}$.
Ceci respecte la symétrie, l'unanimité et la monotonie ...

Unanimité : Si $a \succ_i b$ pour tout i , alors $a \succ b$.

Monotonie :

Supposons $\{i \mid aP_i b\} \subseteq \{i \mid aP'_i b\}$ et $\{i \mid bP_i a\} \supseteq \{i \mid bP'_i a\}$.
Alors $aPb \Rightarrow aP'b$.

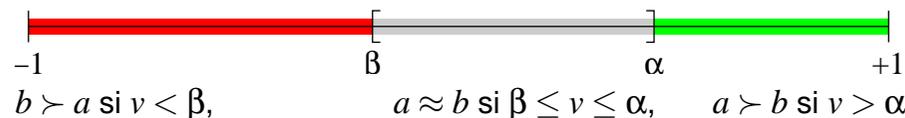
Généralisation : On fixe une mesure $\mu: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sum_i \mu(i) = 1$,
puis on compare $\sum_{i \mid aP_i b} \mu(i)$ à $\sum_{i \mid bP_i a} \mu(i)$ (vote pondéré).

- ☞ Brise la symétrie mais respecte l'unanimité et la monotonie.
- ☞ Le cas extrême $\mu = \delta_j$ revient à une constitution dictatoriale.

Majorité dépassant un seuil

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

Selon la différence $v = \mu\{i \mid aP_i b\} - \mu\{i \mid bP_i a\}$ on pose :



- ☞ Ce mode de scrutin respecte l'unanimité et la monotonie.
- ☞ Pour $\alpha = \beta = 0$ on obtient le vote par majorité simple.
- ☞ Possiblement α et β ne sont pas symétriques.

À titre d'illustration supposons que $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Dans ce cas
une partie $J \subset I$ avec $\mu(J) = \frac{1}{2}$ ne peut pas imposer $a \succ b$,
mais elle peut imposer $b \succ a$. Elle est en position de « veto ».

Parties décisives

Une partie $J \subset I$ est dite *décisive pour* (a, b) si elle peut imposer
 $a \succ b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Par monotonie, J est décisive pour (a, b) ssi elle impose sa
préférence dans la constellation suivante :

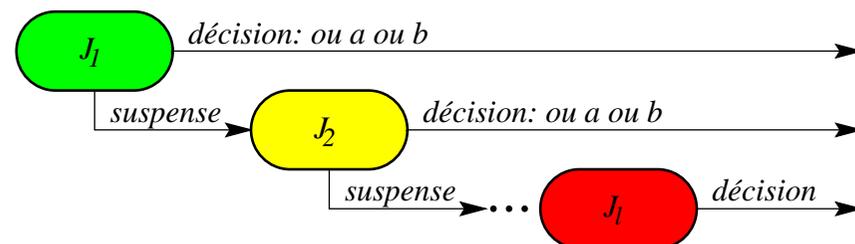
$J:$	$a \succ b$
$I \setminus J:$	$b \succ a$

- ☞ Par unanimité, I est décisif pour tout couple (a, b) .
L'ensemble vide ne peut pas être décisif.
- ☞ Dans un vote majoritaire, J est décisive ssi $\mu(J) > \frac{1}{2}$.
En général, il y a plusieurs parties décisives [minimales].
- ☞ Dans une dictature, J est décisive ssi elle contient le
dictateur j . Ici la partie décisive minimale est $\{j\}$.

Exemple : scrutin en cascade

Comme avant, nous regardons **deux** alternatives : $A = \{a, b\}$.

On choisit des parties non vides $J_1, J_2, \dots, J_\ell \subset I$ ainsi qu'un mode
de scrutin $C_k: \mathbb{P}^{J_k} \rightarrow \mathbb{P}$ pour tout $k = 1, 2, \dots, \ell$.



- ☞ Si tous les modes de scrutin C_k respectent l'unanimité et la
monotonie, alors le scrutin en cascade les respectent aussi.

Marquis Antoine de Condorcet (1743–1794)

Philosophe, mathématicien et homme politique, nommé à l'Académie des Sciences (1769), élu à l'Académie française (1782), il collabora à l'*Encyclopédie* (1784-89). Député à l'Assemblée législative (1791), puis à la Convention (1792). Défenseur de nombreuses causes libérales, il participa à la rédaction de la Constitution.



1765 : Essai sur le calcul intégral, 1767 : Du problème des trois corps, 1768 : Essais d'analyse, 1781–1784 : Mémoire sur le calcul des probabilités, 1784 : Réflexions sur l'esclavage des nègres, 1790 : Essai sur l'admission des femmes au droit de cité.

Petite histoire : Quand les Jacobins introduisirent la constitution de 1793, très différente des propositions de Condorcet, celui-ci la critiqua, ce qui le fit condamner pour trahison. Il se cacha durant 8 mois. Arrêté, il meurt dans une prison dans des circonstances obscures.

Le théorème du dictateur – p.17/25

Le paradoxe de Condorcet

Appliquons le vote majoritaire à **trois** alternatives

1 :	a	\succ	b	\succ	c
2 :	b	\succ	c	\succ	a
3 :	c	\succ	a	\succ	b

Que donne le vote paire par paire ?

- ✌ 1 et 3 soutiennent $a \succ b$ tandis que 2 est contre.
- ✌ 1 et 2 soutiennent $b \succ c$ tandis que 3 est contre.
- ✌ 2 et 3 soutiennent $c \succ a$ tandis que 1 est contre.

Conclusion : $a \succ b \succ c \succ a$!!!

Problème : possibilité de contradictions / préférences circulaires !
Peut-on construire un mode de scrutin qui évite ce problème ?

Le théorème du dictateur – p.18/25

Kenneth J. Arrow (1921–)

Économiste de formation mathématique, professeur à Stanford (1949–1968 et 1980–présent) et Harvard (1968–79). Prix Nobel d'économie en 1972 pour ses études sur les choix collectifs.



1948 : Cowles Commission Memorandum
1951 : Social choice and individual values
1986 : Social choice and multicriterion decision-making

Petite histoire : Au début de la guerre froide il participa aux recherches stratégiques des États Unis. Il fut demandé de construire un mode de scrutin *optimal*, qui en particulier résolve le paradoxe de Condorcet. « It took about five days to write in September 1948. When every attempt failed, I thought of the impossibility theorem. »

Le théorème du dictateur – p.19/25

Le théorème du dictateur

Théorème d'impossibilité (K.J. Arrow, 1948)

Supposons que l'ensemble A contient au moins trois alternatives. Alors il n'existe pas de constitution $C : \mathbb{P}^I \rightarrow \mathbb{P}$ qui vérifie à la fois les trois axiomes d'unanimité, de monotonie, et de symétrie.

Plus précisément : toute constitution $C : \mathbb{P}^I \rightarrow \mathbb{P}$ vérifiant les deux axiomes d'unanimité et de monotonie est dictatoriale !

— * —

Approche : Dans toute la suite on fixe une constitution $C : \mathbb{P}^I \rightarrow \mathbb{P}$ dont on exige les axiomes d'unanimité et de monotonie.

La preuve procède en deux étapes :
On analysera d'abord les parties décisives,
puis on démasquera le dictateur ...

Le théorème du dictateur – p.20/25

Décisif implique tout-puissant

Supposons J décisive pour (a, b) . Regardons la constellation

$$\begin{array}{l} J: \quad x \succ a \succ b \\ I \setminus J: \quad b \succ x \succ a \end{array}$$

On a $x \succ a$ par unanimité, puis $a \succ b$ car J est décisive, donc $x \succ b$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x, b) .

$$\begin{array}{l} J: \quad a \succ b \succ y \\ I \setminus J: \quad b \succ y \succ a \end{array}$$

On a $a \succ b$ car J est décisive, puis $b \succ y$ par unanimité, donc $a \succ y$ par transitivité. On conclut que J est décisive pour (a, y) .

Conclusion : J est décisive pour toute paire (x, y) .

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Regardons une constellation à la Condorcet :

$$\begin{array}{l} j: \quad a \succ z \succ b \\ J \setminus j: \quad b \succ a \succ z \\ I \setminus J: \quad z \succ b \succ a \end{array}$$

J est décisive pour (a, z) . Elle impose donc $a \succ z$.

Si l'on avait $b \succ z$ alors $J \setminus \{j\}$ serait décisive pour (b, z) . Ceci contredirait la minimalité. On a donc $z \succcurlyeq b$.

Par transitivité $a \succ z$ et $z \succcurlyeq b$ entraînent $a \succ b$.

D'autre part, j seul préfère a à b . Il est donc décisif pour (a, b) . Par notre hypothèse de minimalité on conclut que $J = \{j\}$.

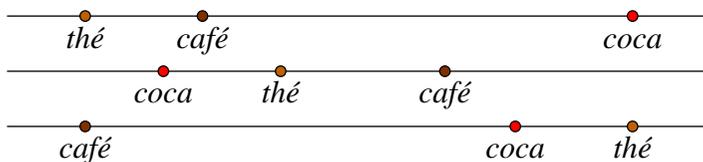
Conclusion et perspectives

Le théorème d'impossibilité dit que **dans ce modèle précis** il n'existe pas de mode de scrutin optimal.

Si l'on ne veut pas accepter cette conclusion, il faut d'abord **vérifier la preuve**. (Exercice bénéfique !)

Vérification faite, on va **revenir sur la modélisation** !

- ☞ Modifier/remplacer l'axiome de monotonie ? Comment ?
- ☞ Définir $C: X \rightarrow \mathbb{P}$ sur une partie $X \subset \mathbb{P}^I$? Laquelle ?
- ☞ Formuler les préférences sur l'axe réel ? A-ce un sens ?
Mésurer l'intensité ? Comparaison inter-personnelle ?



Références bibliographiques

- 📖 K.J. Arrow : *Social choice and individual values*, John Wiley & Sons, New York 1951. (Élaboration de sa thèse.)
- 📖 K.J. Arrow : *Social choice and multicriterion decision-making*, MIT Press, Cambridge 1986. (Reprend la question initiale et discute de nombreux développements ultérieurs.)
- 📖 R.D. Luce, H. Raiffa : *Games and decisions*, John Wiley & Sons, New York 1957 ; Dover Publications, New York 1989. (Le chapitre 14 discute le théorème d'impossibilité d'Arrow.)
- 📖 S. Nasar : *A beautiful mind*, Faber & Faber, London, 1998. (Voir le chapitre 12, qui traite de la RAND Corporation.)
- 📖 Quant aux prix Nobel voir <http://nobelprize.org>