Une (courte) introduction à la Théorie du Choix Social

Sébastien Konieczny

konieczny@irit.fr

IRIT-CNRS

Université Paul Sabatier - Toulouse

Théorie du Choix Social

- Comment définir les préférences collectives d'un groupe (société) à partir des préférences individuelles de chacun de ses individus ?

Théorie du Choix Social

- Comment définir les préférences collectives d'un groupe (société) à partir des préférences individuelles de chacun de ses individus ?
- Economie, Politique, Théorie de la décision, Intelligence Artificielle

Théorie du Choix Social

- Comment définir les préférences collectives d'un groupe (société) à partir des préférences individuelles de chacun de ses individus ?
- Economie, Politique, Théorie de la décision, Intelligence Artificielle
- Borda (1781), Condorcet (1785)

Théorie du Choix Social

- ▷ Comment définir les préférences collectives d’un groupe (société) à partir des préférences individuelles de chacun de ses individus ?
- ▷ Economie, Politique, Théorie de la décision, Intelligence Artificielle
- ▷ Borda (1781), Condorcet (1785)
- ▷ K. J. Arrow (1963), A. K. Sen (1976)

Notations

- Soit un ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$ de *candidats* (alternatives). Un sous-ensemble de X est appelé un *agenda*.

Notations

- Soit un ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$ de *candidats* (alternatives). Un sous-ensemble de X est appelé un *agenda*.
- Chaque *individu* i possède une relation de préférence notée R_i sur l'ensemble des candidats : aR_ib signifie que l'individu i préfère le candidat a au candidat b. On supposera que R_i est une relation réflexive, transitive et totale. P_i dénote la partie stricte de la relation R_i (ie aP_ib ssi aR_ib et non(bR_ia)), et I_i dénote la relation d'équivalence (*d'indifférence*) associée.

Notations

- Soit un ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$ de *candidats* (alternatives). Un sous-ensemble de X est appelé un *agenda*.
- Chaque *individu* i possède une relation de préférence notée R_i sur l'ensemble des candidats : aR_ib signifie que l'individu i préfère le candidat a au candidat b. On supposera que R_i est une relation réflexive, transitive et totale. P_i dénote la partie stricte de la relation R_i (ie aP_ib ssi aR_ib et non(bR_ia)), et I_i dénote la relation d'équivalence (*d'indifférence*) associée.
- Un ensemble d'agents $N = \{1, \ldots, n\}$ est appelé un *profil*. La relation de préférence pour le profil N est notée R, P et I représentent respectivement la partie stricte et la relation d'équivalence associée.

Notations

- Soit un ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$ de *candidats* (alternatives). Un sous-ensemble de X est appelé un *agenda*.
- Chaque *individu* i possède une relation de préférence notée R_i sur l'ensemble des candidats : aR_ib signifie que l'individu i préfère le candidat a au candidat b. On supposera que R_i est une relation réflexive, transitive et totale. P_i dénote la partie stricte de la relation R_i (ie aP_ib ssi aR_ib et non(bR_ia)), et I_i dénote la relation d'équivalence (*d'indifférence*) associée.
- Un ensemble d'agents $N = \{1, \ldots, n\}$ est appelé un *profil*. La relation de préférence pour le profil N est notée R, P et I représentent respectivement la partie stricte et la relation d'équivalence associée.

2 problèmes :

- Déterminer quel est le candidat choisi (préféré) par un profil donné, noté $C_N(X)$.
- Déterminer la relation de préférence R d'un profil donné.

Notations

- Soit un ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$ de *candidats* (alternatives). Un sous-ensemble de X est appelé un *agenda*.
- Chaque *individu* i possède une relation de préférence notée R_i sur l'ensemble des candidats : aR_ib signifie que l'individu i préfère le candidat a au candidat b. On supposera que R_i est une relation réflexive, transitive et totale. P_i dénote la partie stricte de la relation R_i (ie aP_ib ssi aR_ib et non(bR_ia)), et I_i dénote la relation d'équivalence (*d'indifférence*) associée.
- Un ensemble d'agents $N = \{1, \ldots, n\}$ est appelé un *profil*. La relation de préférence pour le profil N est notée R, P et I représentent respectivement la partie stricte et la relation d'équivalence associée.

Hypothèse simplificatrice pour la suite :

- Il n'y a pas d'égalité dans les préférences des individus (ie la relation R est réflexive, transitive, antisymétrique et totale)

2 candidats

- *Majorité*. On choisit le candidat qui est majoritairement préféré :

$$a \in C_N(\{a,b\}) \text{ ssi } |\{i|aP_ib\}| \geq |\{i|bP_ia\}|$$

2 candidats

- *Majorité*. On choisit le candidat qui est majoritairement préféré :

$$a \in C_N(\{a,b\}) \text{ ssi } |\{i|aP_ib\}| \geq |\{i|bP_ia\}|$$

Pas de problème, de bonnes propriétés.

2 candidats

▷ *Majorité*. On choisit le candidat qui est majoritairement préféré :

$$a \in C_N(\{a,b\}) \text{ ssi } |\{i|aP_ib\}| \geq |\{i|bP_ia\}|$$

Pas de problème, de bonnes propriétés.

▷ Problème : comment généraliser cela à plus de 2 candidats ?

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

- Pour tout profil, il ne peut y avoir qu'un gagnant de Condorcet.

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

- Pour tout profil, il ne peut y avoir qu'un gagnant de Condorcet.
- Problème : il se peut qu'il n'y en ait aucun !

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

- Pour tout profil, il ne peut y avoir qu'un gagnant de Condorcet.
- Problème : il se peut qu'il n'y en ait aucun !

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
bP_2cP_2a	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 1, c = 2$
cP_3aP_3b	Pour $X = \{b, c\}$ $b = 2, c = 1$

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

- Pour tout profil, il ne peut y avoir qu'un gagnant de Condorcet.
- Problème : il se peut qu'il n'y en ait aucun !

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
bP_2cP_2a	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 1, c = 2$
cP_3aP_3b	Pour $X = \{b, c\}$ $b = 2, c = 1$

- Que fait-on quand il n'y a pas de gagnant de Condorcet ?

Gagnant de Condorcet

- Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

- Pour tout profil, il ne peut y avoir qu'un gagnant de Condorcet.
- Problème : il se peut qu'il n'y en ait aucun !

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
bP_2cP_2a	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 1, c = 2$
cP_3aP_3b	Pour $X = \{b, c\}$ $b = 2, c = 1$

- Que fait-on quand il n'y a pas de gagnant de Condorcet ?
- Une méthode qui choisit le gagnant de Condorcet quand il existe est appelée *Condorcet cohérente*.

Scrutin majoritaire simple

- Système utilisé en Grande-Bretagne
- Bulletin uninominal. Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi.

Scrutin majoritaire simple

- Système utilisé en Grande-Bretagne
- Bulletin uninominal. Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi.

21 votants.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Résultat : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Le candidat a est élu.

Scrutin majoritaire simple

- ▷ Système utilisé en Grande-Bretagne
- ▷ Bulletin uninominal. Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi.

21 votants.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Résultat : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Le candidat a est élu.

- ▷ Mais une majorité d'individus (11/21) préfère tous les autres candidats au candidat élu !

Scrutin majoritaire simple

- Système utilisé en Grande-Bretagne
- Bulletin uninominal. Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi.

21 votants.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Résultat : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Le candidat a est élu.

- Mais une majorité d'individus (11/21) préfère tous les autres candidats au candidat élu !
- Le scrutin majoritaire simple permet d'élire un perdant de Condorcet !

Scrutin majoritaire simple

- Système utilisé en Grande-Bretagne
- Bulletin uninominal. Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi.

21 votants.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Résultat : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Le candidat a est élu.

- Mais une majorité d'individus (11/21) préfère tous les autres candidats au candidat élu !
- Le scrutin majoritaire simple permet d'élire un perdant de Condorcet !
- Peut-on alors espérer des votants qu'ils soient sincères ?

Scrutin majoritaire à deux tours

- Système utilisé en France
- Bulletin uninominal. Premier tour : le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu, sinon les deux candidats ayant reçu le plus de voix vont aux seconds tours. Second tour : le candidat avec le plus de voix est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

- Système utilisé en France
- Bulletin uninominal. Premier tour : le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu, sinon les deux candidats ayant reçu le plus de voix vont aux seconds tours. Second tour : le candidat avec le plus de voix est élu.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Premier tour : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Les candidats a et b vont au second tour.
Second tour : $a : 10$, $b : 11$
Le candidat b est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

- Système utilisé en France
- Bulletin uninominal. Premier tour : le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu, sinon les deux candidats ayant reçu le plus de voix vont aux seconds tours. Second tour : le candidat avec le plus de voix est élu.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Premier tour : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Les candidats a et b vont au second tour.
Second tour : $a : 10$, $b : 11$
Le candidat b est élu.

- Le scrutin majoritaire à deux tours ne peut pas élire un perdant de Condorcet.

Scrutin majoritaire à deux tours

- Système utilisé en France
- Bulletin uninominal. Premier tour : le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu, sinon les deux candidats ayant reçu le plus de voix vont aux seconds tours. Second tour : le candidat avec le plus de voix est élu.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Premier tour : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Les candidats a et b vont au second tour.
Second tour : $a : 10$, $b : 11$
Le candidat b est élu.

- Le scrutin majoritaire à deux tours ne peut pas élire un perdant de Condorcet.
- Mais il est tout de même possible que tous les autres candidats sauf un soient préférés au candidat élu par une majorité des votants !

Scrutin majoritaire à deux tours

10: $bPaPcPd$
6: $cPaPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a : 5$, $b : 10$, $c : 6$
Les candidats b et c vont au second tour.
Second tour : $b : 15$, $c : 6$
Le candidat b est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

10: $bPaPcPd$
6: $cPaPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a:5$, $b:10$, $c:6$
Les candidats b et c vont au second tour.
Second tour : $b:15$, $c:6$
Le candidat b est élu.

Les 6 individus avec les préférences $cPaPdPb$ décident de voter comme si leurs préférences étaient $aPcPdPb$.

Scrutin majoritaire à deux tours

10: $bPaPcPd$
6: $cPaPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a : 5$, $b : 10$, $c : 6$
Les candidats b et c vont au second tour.
Second tour : $b : 15$, $c : 6$
Le candidat b est élu.

Les 6 individus avec les préférences $cPaPdPb$ décident de voter comme si leurs préférences étaient $aPcPdPb$.

10: $bPaPcPd$
6: $aPcPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a : 11$, $b : 10$
Le candidat a est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours : manipulabilité

10: $bPaPcPd$
6: $cPaPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a : 5$, $b : 10$, $c : 6$
Les candidats b et c vont au second tour.
Second tour : $b : 15$, $c : 6$
Le candidat b est élu.

Les 6 individus avec les préférences $cPaPdPb$ décident de voter comme si leurs préférences étaient $aPcPdPb$.

10: $bPaPcPd$
6: $aPcPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a : 11$, $b : 10$
Le candidat a est élu.

- ▷ Le scrutin majoritaire à deux tours est manipulable : il peut être profitable à un individu de mentir sur ses préférences.

Scrutin majoritaire à deux tours

6: $aPbPc$	Premier tour : $a:6$, $b:6$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et b vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:11$, $b:6$
2: $bPaPc$	Le candidat a est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

6: $aPbPc$	Premier tour : $a : 6$, $b : 6$, $c : 5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et b vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a : 11$, $b : 6$
2: $bPaPc$	Le candidat a est élu.

Le candidat a fait une campagne de presse contre le candidat b. La campagne fonctionne, 2 individus qui avaient les préférences $bPaPc$ ont à présent les préférences $aPbPc$.

Scrutin majoritaire à deux tours

6: $aPbPc$	Premier tour : $a : 6$, $b : 6$, $c : 5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et b vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a : 11$, $b : 6$
2: $bPaPc$	Le candidat a est élu.

Le candidat a fait une campagne de presse contre le candidat b. La campagne fonctionne, 2 individus qui avaient les préférences $bPaPc$ ont à présent les préférences $aPbPc$.

8: $aPbPc$	Premier tour : $a : 8$, $b : 4$, $c : 5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et c vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a : 8$, $c : 9$
	Le candidat c est élu !

Scrutin majoritaire à deux tours

6: $aPbPc$	Premier tour : $a:6$, $b:6$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et b vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:11$, $b:6$
2: $bPaPc$	Le candidat a est élu.

Le candidat a fait une campagne de presse contre le candidat b. La campagne fonctionne, 2 individus qui avaient les préférences $bPaPc$ ont à présent les préférences $aPbPc$.

8: $aPbPc$	Premier tour : $a:8$, $b:4$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et c vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:8$, $c:9$
	Le candidat c est élu !

▷ La campagne de presse réussie de a lui fait perdre l'élection !

Scrutin majoritaire à deux tours : monotonie

6: $aPbPc$	Premier tour : $a:6$, $b:6$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et b vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:11$, $b:6$
2: $bPaPc$	Le candidat a est élu.

Le candidat a fait une campagne de presse contre le candidat b. La campagne fonctionne, 2 individus qui avaient les préférences $bPaPc$ ont à présent les préférences $aPbPc$.

8: $aPbPc$	Premier tour : $a:8$, $b:4$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et c vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:8$, $c:9$
	Le candidat c est élu !

- ▷ La campagne de presse réussie de a lui fait perdre l'élection !
- ▷ Le scrutin majoritaire à deux tours est non-monotone.

Scrutin majoritaire à deux tours

4: $aPbPc$
4: $cPbPa$
3: $bPcPa$

Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 4$
Les candidats a et c vont au second tour.
Second tour : $a : 4$, $b : 7$
Le candidat c est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $a : 4$, $b : 7$
	Le candidat c est élu.

2 individus dont les préférences sont $aPbPc$ n'ont pas le courage d'aller voter.

Scrutin majoritaire à deux tours

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $a : 4$, $b : 7$
	Le candidat c est élu.

2 individus dont les préférences sont $aPbPc$ n'ont pas le courage d'aller voter.

2: $aPbPc$	Premier tour : $a : 2$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats b et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $b : 5$, $c : 4$
	Le candidat b est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:3$, $c:4$
4: $cPbPa$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $a:4$, $b:7$
	Le candidat c est élu.

2 individus dont les préférences sont $aPbPc$ n'ont pas le courage d'aller voter.

2: $aPbPc$	Premier tour : $a:2$, $b:3$, $c:4$
4: $cPbPa$	Les candidats b et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $b:5$, $c:4$
	Le candidat b est élu.

- ▷ Il est préférable pour les 2 individus de s'abstenir de voter.

Scrutin majoritaire à deux tours : participation

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $a : 4$, $b : 7$
	Le candidat c est élu.

2 individus dont les préférences sont $aPbPc$ n'ont pas le courage d'aller voter.

2: $aPbPc$	Premier tour : $a : 2$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats b et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $b : 5$, $c : 4$
	Le candidat b est élu.

- ▷ Il est préférable pour les 2 individus de s'abstenir de voter.
- ▷ Le scrutin majoritaire à deux tours n'incite pas à la participation.

Scrutin majoritaire à deux tours

- Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:3$, $c:6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:6$, $c:3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

- ▷ Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:3$, $c:6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:6$, $c:3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

- ▷ Le candidat a est élu dans les 2 circonscriptions, il doit donc être élu.

Scrutin majoritaire à deux tours

- Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:3$, $c:6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:6$, $c:3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 1 + Circonscription 2 :

8: $aPbPc$	Premier tour : $a:8$, $b:9$, $c:9$
6: $bPaPc$	Les candidats b et c vont au second tour.
6: $cPaPb$	Second tour : $b:17$, $c:9$
3: $cPbPa$	Le candidat b est élu.
3: $bPcPa$	Le candidat a ne passe même pas le premier tour !

Scrutin majoritaire à deux tours

- Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a : 7$, $c : 6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 6$, $c : 3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a : 7$, $c : 6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

- Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas séparable.

Scrutin majoritaire à deux tours

- ▷ Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:3$, $c:6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a:4$, $b:6$, $c:3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a:7$, $c:6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas séparable.
- ▷ Problème des décisions décentralisées.

Scrutin majoritaire à deux tours : séparabilité

- ▷ Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a : 7$, $c : 6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 6$, $c : 3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a : 7$, $c : 6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas séparable.
- ▷ Problème des décisions décentralisées.
- ▷ Problème de découpage des circonscriptions.

Scrutin majoritaire à 2 tours

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51: $aPbPcP\ldots PyPz$	Premier tour : $a : 51$, $b : 49$
49: $zPbPcP\ldots PyPa$	Le candidat a est élu au premier tour.

Scrutin majoritaire à 2 tours

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51: $aPbPcP \ldots PyPz$ — Premier tour : $a : 51$, $b : 49$
49: $zPbPcP \ldots PyPa$ — Le candidat a est élu au premier tour.

- ▷ Pourtant c'est le plus mauvais candidat pour une partie importante de la société.

Scrutin majoritaire à 2 tours

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51: $aPbPcP \ldots PyPz$	Premier tour : $a : 51$, $b : 49$
49: $zPbPcP \ldots PyPa$	Le candidat a est élu au premier tour.

- ▷ Pourtant c'est le plus mauvais candidat pour une partie importante de la société.
- ▷ Alors que le candidat b est unanimement considéré comme un très bon candidat.

Scrutin majoritaire à 2 tours : dictature de la majorité

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51: $aPbPcP \ldots PyPz$	Premier tour : $a : 51$, $b : 49$
49: $zPbPcP \ldots PyPa$	Le candidat a est élu au premier tour.

- ▷ Pourtant c'est le plus mauvais candidat pour une partie importante de la société.
- ▷ Alors que le candidat b est unanimement considéré comme un très bon candidat.
- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours permet la dictature de la majorité.

Scrutin majoritaire à 2 tours

Pour résumer :

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours est (légèrement) meilleur que le scrutin majoritaire simple puisqu'il ne peut pas choisir de perdant de Condorcet (mais on n'a pas beaucoup mieux).
- ▷ Il n'est pas monotone
- ▷ Il n'incite pas à la participation
- ▷ Il est manipulable
- ▷ Il est non séparable
- ▷ Il permet la dictature de la majorité

Scrutin majoritaire à 2 tours

Pour résumer :

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours est (légèrement) meilleur que le scrutin majoritaire simple puisqu'il ne peut pas choisir de perdant de Condorcet (mais on n'a pas beaucoup mieux).
- ▷ Il n'est pas monotone
- ▷ Il n'incite pas à la participation
- ▷ Il est manipulable
- ▷ Il est non séparable
- ▷ Il permet la dictature de la majorité

La question est donc de savoir :

- ▷ Pourquoi continuons-nous à utiliser ce système ?

Scrutin majoritaire à 2 tours

Pour résumer :

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours est (légèrement) meilleur que le scrutin majoritaire simple puisqu’il ne peut pas choisir de perdant de Condorcet (mais on n’a pas beaucoup mieux).
- ▷ Il n’est pas monotone
- ▷ Il n’incite pas à la participation
- ▷ Il est manipulable
- ▷ Il est non séparable
- ▷ Il permet la dictature de la majorité

La question est donc de savoir :

- ▷ Pourquoi continuons-nous à utiliser ce système ?
- ▷ Quelles sont les alternatives ?

Scrutin majoritaire à 2 tours

Pour résumer :

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours est (légèrement) meilleur que le scrutin majoritaire simple puisqu’il ne peut pas choisir de perdant de Condorcet (mais on n’a pas beaucoup mieux).
- ▷ Il n’est pas monotone
- ▷ Il n’incite pas à la participation
- ▷ Il est manipulable
- ▷ Il est non séparable
- ▷ Il permet la dictature de la majorité

La question est donc de savoir :

- ▷ Pourquoi continuons-nous à utiliser ce système ?
- ▷ Quelles sont les alternatives ?
- ▷ Quels sont les systèmes de votes ayant de bonnes propriétés ?

Règles de choix social

- Une *règle de choix social* est une fonction f qui associe une fonction de choix C_N à tout profil N. Quel que soit l'agenda X, la fonction de choix $C_N(X)$ retourne alors les candidats choisis.

Règles de choix social

- Une *règle de choix social* est une fonction f qui associe une fonction de choix C_N à tout profil N. Quel que soit l'agenda X, la fonction de choix $C_N(X)$ retourne alors les candidats choisis.
- Question : Quelles sont les “bonnes” règles de choix social ?

Règles de choix social

- Une *règle de choix social* est une fonction f qui associe une fonction de choix C_N à tout profil N. Quel que soit l'agenda X, la fonction de choix $C_N(X)$ retourne alors les candidats choisis.
- Question : Quelles sont les “bonnes” règles de choix social ?

On ne peut pas étudier individuellement toutes ces règles :

- Avec 5 votants et 4 alternatives. Il y a 75 relations de préférences définissables à partir de 4 alternatives. Cela donne donc $75^5 \simeq 10^9$ profils différents possibles. Avec 4 alternatives, il y a $15 * 7^4 * 3^6 = 26254935$ fonctions de choix possibles. Le nombre de règles de choix social définissables est donc de :

$$(15 * 7^4 * 3^6)^{75^5} > 10^{10^{10}}$$

Règles de choix social

- Mais ce chiffre ne représente que le nombre de fonctions *mathématiquement définissables*, beaucoup d'entre elles ne seront jamais satisfaisantes comme fonctions de choix social. Par exemple la fonction qui choisit toujours le candidat a et la fonction qui choisit toujours le candidat préféré de l'individu i font parties des fonctions définissables.

Règles de choix social

- Mais ce chiffre ne représente que le nombre de fonctions *mathématiquement définissables*, beaucoup d'entre elles ne seront jamais satisfaisantes comme fonctions de choix social. Par exemple la fonction qui choisit toujours le candidat a et la fonction qui choisit toujours le candidat préféré de l'individu i font parties des fonctions définissables.
- On peut donc réduire notre champ d'étude pour n'étudier que les fonctions qui vérifient un minimum de propriétés de rationalité. Nous en avons déjà vu quelques unes (Condorcet cohérence, monotonie, incitation à la participation, etc...)

Propriétés

- *Universalité.* La règle de choix social doit avoir comme domaine l'ensemble des profils possibles. Les fonctions de choix définies par la règle de choix social doivent avoir comme domaine l'ensemble des agendas possibles.

Propriétés

- ▷ *Universalité.* La règle de choix social doit avoir comme domaine l'ensemble des profils possibles. Les fonctions de choix définies par la règle de choix social doivent avoir comme domaine l'ensemble des agendas possibles.
- ▷ *Unanimité.* Si tous les individus du profil N préfèrent un candidat a à un candidat b, alors la règle de choix social doit préférer le candidat a au candidat b: Si $\forall i \; aP_ib$ et $a \in X$, alors $b \notin C_N(X)$.

Propriétés

- *Universalité.* La règle de choix social doit avoir comme domaine l'ensemble des profils possibles. Les fonctions de choix définies par la règle de choix social doivent avoir comme domaine l'ensemble des agendas possibles.
- *Unanimité.* Si tous les individus du profil N préfèrent un candidat a à un candidat b, alors la règle de choix social doit préférer le candidat a au candidat b: Si $\forall i \ aP_ib$ et $a \in X$, alors $b \notin C_N(X)$.
- *Indépendance des Alternatives Non-Disponibles.* Si la restriction de deux profils N et N' à un agenda X sont identiques, alors les choix faits pour cet agenda par la règle de choix social doivent être les mêmes: Si $\forall a, b \in X, \forall i aR_ib \Leftrightarrow aR_i'b$, alors $C_N(X) = C_{N'}(X)$.

Propriétés

- *Universalité.* La règle de choix social doit avoir comme domaine l'ensemble des profils possibles. Les fonctions de choix définies par la règle de choix social doivent avoir comme domaine l'ensemble des agendas possibles.
- *Unanimité.* Si tous les individus du profil N préfèrent un candidat a à un candidat b, alors la règle de choix social doit préférer le candidat a au candidat b: Si $\forall i \; aP_ib$ et $a \in X$, alors $b \notin C_N(X)$.
- *Indépendance des Alternatives Non-Disponibles.* Si la restriction de deux profils N et N' à un agenda X sont identiques, alors les choix faits pour cet agenda par la règle de choix social doivent être les mêmes: Si $\forall a, b \in X, \forall i aR_ib \Leftrightarrow aR'_ib$, alors $C_N(X) = C_{N'}(X)$.
- *Transitivité.* Les préférences induites par la règle de choix social doivent être transitives: $\exists R$ relation réflexive, transitive et totale t.q. $C_N(X) = \{a \in X | aRb \; \forall b \in X\}$.

Propriétés

- *Universalité.* La règle de choix social doit avoir comme domaine l'ensemble des profils possibles. Les fonctions de choix définies par la règle de choix social doivent avoir comme domaine l'ensemble des agendas possibles.
- *Unanimité.* Si tous les individus du profil N préfèrent un candidat a à un candidat b, alors la règle de choix social doit préférer le candidat a au candidat b: Si $\forall i \; aP_ib$ et $a \in X$, alors $b \notin C_N(X)$.
- *Indépendance des Alternatives Non-Disponibles.* Si la restriction de deux profils N et N' à un agenda X sont identiques, alors les choix faits pour cet agenda par la règle de choix social doivent être les mêmes: Si $\forall a, b \in X, \forall i aR_ib \Leftrightarrow aR'_ib$, alors $C_N(X) = C_{N'}(X)$.
- *Transitivité.* Les préférences induites par la règle de choix social doivent être transitives: $\exists R$ relation réflexive, transitive et totale t.q. $C_N(X) = \{a \in X | aRb \; \forall b \in X\}$.
- *Absence de Dictateur.* La règle de choix social n'obéit pas à un individu (dictateur) : $\nexists i \in N$ t.q. $\forall a, b \in X$ si aP_ib alors $b \notin C_N(X)$.

Théorème d’Arrow

- Avec les 5 propriétés que nous venons d’énoncer, nous pouvons nous attendre à avoir réduit de manière conséquente le nombre de règles de choix social satisfaisantes.

Théorème d’Arrow

- Avec les 5 propriétés que nous venons d’énoncer, nous pouvons nous attendre à avoir réduit de manière conséquente le nombre de règles de choix social satisfaisantes.
- Nous avons largement dépassé nos objectifs puisqu’il n’en reste

Théorème d'Arrow

- Avec les 5 propriétés que nous venons d'énoncer, nous pouvons nous attendre à avoir réduit de manière conséquente le nombre de règles de choix social satisfaisantes.
- Nous avons largement dépassé nos objectifs puisqu'il n'en reste aucune !

Théorème d’Arrow

- Avec les 5 propriétés que nous venons d’énoncer, nous pouvons nous attendre à avoir réduit de manière conséquente le nombre de règles de choix social satisfaisantes.
- Nous avons largement dépassé nos objectifs puisqu’il n’en reste aucune !

Théorème d’impossibilité d’Arrow [Arrow, 1951]. Aucune règle de choix social ne satisfait l’Universalité, l’Unanimité, l’Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, la Transitivité et l’Absence de Dictateur.

Echapper au Théorème d’Arrow?

- Possibilité d’affaiblir une des conditions
  - Universalité : La règle de choix social n’est définie que pour certains profils (exemple: single-peaked preferences).

Echapper au Théorème d’Arrow?

- Possibilité d’affaiblir une des conditions
  - Universalité : La règle de choix social n’est définie que pour certains profils (exemple: single-peaked preferences).
  - Transitivité : On peut ne demander la transitivité que pour la partie stricte de la relation de préférence. Voire ne demander que l’absence de cycles.
    - Oligarchies, Droit de veto

Echapper au Théorème d’Arrow?

- Possibilité d’affaiblir une des conditions
  - Universalité : La règle de choix social n’est définie que pour certains profils (exemple: single-peaked preferences).
  - Transitivité : On peut ne demander la transitivité que pour la partie stricte de la relation de préférence. Voire ne demander que l’absence de cycles.
    - Oligarchies, Droit de veto
  - Indépendance des Alternatives Non-Disponibles :
    - Pourquoi le résultat dépendrait-il des absents ?
    - Intensité des préférences
    - Comparaison Interpersonnelle des utilités

Echapper au Théorème d’Arrow?

- Possibilité d’affaiblir une des conditions
  - Universalité : La règle de choix social n’est définie que pour certains profils (exemple: single-peaked preferences).
  - Transitivité : On peut ne demander la transitivité que pour la partie stricte de la relation de préférence. Voire ne demander que l’absence de cycles.
    - Oligarchies, Droit de veto
  - Indépendance des Alternatives Non-Disponibles :
    - Pourquoi le résultat dépendrait-il des absents ?
    - Intensité des préférences
    - Comparaison Interpersonnelle des utilités
- Toute règle de choix social viole au moins une de ces propriétés.

Echapper au Théorème d'Arrow?

- Possibilité d'affaiblir une des conditions
  - Universalité : La règle de choix social n'est définie que pour certains profils (exemple: single-peaked preferences).
  - Transitivité : On peut ne demander la transitivité que pour la partie stricte de la relation de préférence. Voire ne demander que l'absence de cycles.
    - Oligarchies, Droit de veto
  - Indépendance des Alternatives Non-Disponibles :
    - Pourquoi le résultat dépendrait-il des absents ?
    - Intensité des préférences
    - Comparaison Interpersonnelle des utilités
- Toute règle de choix social viole au moins une de ces propriétés.
- Nécessité d'une analyse de la méthode choisie.

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
- $\{1\}$: scrutin majoritaire simple

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
- $\{1\}$: scrutin majoritaire simple
- $\{2\}$: Chaque individu doit voter pour deux candidats

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
- $\{1\}$: scrutin majoritaire simple
- $\{2\}$: Chaque individu doit voter pour deux candidats
- $\{1, 2\}$: Chaque individu doit voter pour un ou deux candidats

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
- $\{1\}$: scrutin majoritaire simple
- $\{2\}$: Chaque individu doit voter pour deux candidats
- $\{1, 2\}$: Chaque individu doit voter pour un ou deux candidats
- $\{m-1\}$: Chaque individu doit voter pour tous les candidats sauf un

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
- $\{1\}$: scrutin majoritaire simple
- $\{2\}$: Chaque individu doit voter pour deux candidats
- $\{1, 2\}$: Chaque individu doit voter pour un ou deux candidats
- $\{m-1\}$: Chaque individu doit voter pour tous les candidats sauf un
- $\{1, 2, \ldots, m-1\}$: Vote par assentiment (Approval voting)

Méthodes de vote par scorage

- Soient m candidats. Une *méthode de vote par scorage* (scoring voting rule) est définie par :
  - Soit une séquence non-décroissante d'entiers : $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m-1}$ t.q. $s_0 < s_{m-1}$
  - Chaque individu donne s_0 points au candidat qu'il classe dernier, s_1 points à l'avant dernier, etc.
  - Le candidat ayant reçu le plus de points est élu.

Méthodes de vote par scorage

- Soient m candidats. Une *méthode de vote par scorage* (scoring voting rule) est définie par :
  - Soit une séquence non-décroissante d'entiers : $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m-1}$ t.q. $s_0 < s_{m-1}$
  - Chaque individu donne s_0 points au candidat qu'il classe dernier, s_1 points à l'avant dernier, etc.
  - Le candidat ayant reçu le plus de points est élu.
- $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} < s_{m-1}$ est le scrutin majoritaire simple.

Méthodes de vote par scorage

- Soient m candidats. Une *méthode de vote par scorage* (scoring voting rule) est définie par :
  - Soit une séquence non-décroissante d'entiers : $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m-1}$ t.q. $s_0 < s_{m-1}$
  - Chaque individu donne s_0 points au candidat qu'il classe dernier, s_1 points à l'avant dernier, etc.
  - Le candidat ayant reçu le plus de points est élu.
- $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} < s_{m-1}$ est le scrutin majoritaire simple.
- $s_0 = 0, s_1 = 1, \ldots, s_{m-1} = m - 1$ est la règle de Borda.

Méthodes de vote par scorage

Toute méthode de vote par scorage satisfait :

- *Monotonie.* Si le candidat a est élu, étant donné un profil N. Si on change le profil N de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié.

Méthodes de vote par scorage

Toute méthode de vote par scorage satisfait :

- *Monotonie.* Si le candidat a est élu, étant donné un profil N. Si on change le profil N de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié.
- *Séparabilité.* Si deux profils N_1 et N_2 choisissent un même candidat a dans un agenda X, alors a doit être choisi parmi X pour le profil $N_1 \cup N_2$.

Méthodes de vote par scorage

Toute méthode de vote par scorage satisfait :

- *Monotonie.* Si le candidat a est élu, étant donné un profil N. Si on change le profil N de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié.
- *Séparabilité.* Si deux profils N_1 et N_2 choisissent un même candidat a dans un agenda X, alors a doit être choisi parmi X pour le profil $N_1 \cup N_2$.
- *Continuité.* Si pour un profil N_1 un candidat a est élu pour un agenda X, et que pour un profil (disjoint) N_2 un autre candidat b est élu pour le même agenda, alors il est possible de dupliquer le profil N_1 un certain nombre m de fois pour que a soit élu pour le profil $m.N_1 \cup N_2$.

Méthodes de vote par scorage

Toute méthode de vote par scorage satisfait :

- *Monotonie.* Si le candidat a est élu, étant donné un profil N. Si on change le profil N de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié.
- *Séparabilité.* Si deux profils N_1 et N_2 choisissent un même candidat a dans un agenda X, alors a doit être choisi parmi X pour le profil $N_1 \cup N_2$.
- *Continuité.* Si pour un profil N_1 un candidat a est élu pour un agenda X, et que pour un profil (disjoint) N_2 un autre candidat b est élu pour le même agenda, alors il est possible de dupliquer le profil N_1 un certain nombre m de fois pour que a soit élu pour le profil $m.N_1 \cup N_2$.
- *Participation.* Si un candidat a est élu pour l'agenda X et le profil N. Alors pour le profil $N \cup \{i\}$ et pour le même agenda, soit le candidat a est élu, soit c'est un candidat b tel que bP_ia.

Méthodes de vote par scorage

Toute méthode de vote par scorage satisfait :

- *Monotonie.* Si le candidat a est élu, étant donné un profil N. Si on change le profil N de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié.
- *Séparabilité.* Si deux profils N_1 et N_2 choisissent un même candidat a dans un agenda X, alors a doit être choisi parmi X pour le profil $N_1 \cup N_2$.
- *Continuité.* Si pour un profil N_1 un candidat a est élu pour un agenda X, et que pour un profil (disjoint) N_2 un autre candidat b est élu pour le même agenda, alors il est possible de dupliquer le profil N_1 un certain nombre m de fois pour que a soit élu pour le profil $m.N_1 \cup N_2$.
- *Participation.* Si un candidat a est élu pour l'agenda X et le profil N. Alors pour le profil $N \cup \{i\}$ et pour le même agenda, soit le candidat a est élu, soit c'est un candidat b tel que bP_ia.

Aucune méthode de vote par scorage n'est Condorcet cohérente.

Règle de Borda

2: $bPaPcPd$	Scores de Borda : $a : 7$, $b : 6$, $c : 4$, $d : 1$
1: $aPcPdPb$	Le candidat a est élu

Règle de Borda

2: $bPaPcPd$	Scores de Borda : $a : 7$, $b : 6$, $c : 4$, $d : 1$
1: $aPcPdPb$	Le candidat a est élu

- ▷ Le gagnant de Condorcet est b.

Règle de Borda

2: $bPaPcPd$	Scores de Borda : $a : 7$, $b : 6$, $c : 4$, $d : 1$
1: $aPcPdPb$	Le candidat a est élu

- ▷ Le gagnant de Condorcet est b.
- ▷ Si c et d se retirent de l'élection :

Règle de Borda

2: $bPaPcPd$	Scores de Borda : $a:7$, $b:6$, $c:4$, $d:1$
1: $aPcPdPb$	Le candidat a est élu

- ▷ Le gagnant de Condorcet est b.
- ▷ Si c et d se retirent de l'élection :

2: bPa	Scores de Borda : $a:1$, $b:2$
1: aPb	Le candidat b est élu

Règle de Borda

2: $bPaPcPd$	Scores de Borda : $a:7$, $b:6$, $c:4$, $d:1$
1: $aPcPdPb$	Le candidat a est élu

- Le gagnant de Condorcet est b.
- Si c et d se retirent de l'élection :

2: bPa	Scores de Borda : $a:1$, $b:2$
1: aPb	Le candidat b est élu

- La règle de Borda ne satisfait pas l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Méthodes qui élisent le gagnant de Condorcet si il existe.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Méthodes qui élisent le gagnant de Condorcet si il existe.
- Généralisation de la méthode de Condorcet :

Méthodes Condorcet cohérentes

- Méthodes qui élisent le gagnant de Condorcet si il existe.
- Généralisation de la méthode de Condorcet :
  - *Règle de Copeland.* Associer à chaque candidat a le score suivant : pour chaque autre candidat $b \neq a$, +1 si une majorité préfère a à b, -1 si une majorité préfère b à a et 0 sinon. Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Copeland.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Méthodes qui élisent le gagnant de Condorcet si il existe.
- Généralisation de la méthode de Condorcet :
  - *Règle de Copeland.* Associer à chaque candidat a le score suivant : pour chaque autre candidat $b \neq a$, +1 si une majorité préfère a à b, -1 si une majorité préfère b à a et 0 sinon. Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Copeland.
  - *Règle de Kramer-Simpson.* Associer à chaque candidat a le score suivant : pour chaque autre candidat $b \neq a$, calculer $N(a, b)$ le nombre d'individus préférant a à b. Le score de Simpson est le minimum des $N(a, b)$. Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Simpson.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Les règles de Copeland et de Kramer-Simpson sont monotones.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Les règles de Copeland et de Kramer-Simpson sont monotones.
- Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire Séparabilité.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Les règles de Copeland et de Kramer-Simpson sont monotones.
- Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire Séparabilité.
- Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire Participation.

Règle de Copeland - Règle de Kramer-Simpson

- *Copeland*

$$\begin{array}{lcccccccl}
cop(a) = & +1 & -1 & -1 & & & & = -1 \\
cop(b) = & -1 & & & +1 & +1 & & = +1 \\
cop(c) = & & +1 & & -1 & & +1 & = +1 \\
cop(d) = & & & +1 & & -1 & -1 & = -1
\end{array}$$

Les candidats b et c sont *“élus”*.

5: $aPbPcPd$
4: $bPcPdPa$
3: $dPcPaPb$

Règle de Copeland - Règle de Kramer-Simpson

5: $aPbPcPd$
4: $bPcPdPa$
3: $dPcPaPb$

- *Copeland*

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
cop(a) = & +1 & -1 & -1 & & & & = -1 \\
cop(b) = & -1 & & & +1 & +1 & & = +1 \\
cop(c) = & & +1 & & -1 & & +1 & = +1 \\
cop(d) = & & & +1 & & -1 & -1 & = -1
\end{array}$$

Les candidats b et c sont *“élus”*.

- *Kramer-Simpson*

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
sim(a) = & 8 & 5 & 5 & & & & = 5 \\
sim(b) = & 4 & & & 9 & 9 & & = 4 \\
sim(c) = & & 7 & & 3 & & 9 & = 3 \\
sim(d) = & & & 7 & & 3 & 3 & = 3
\end{array}$$

Le candidat a est élu.

Le choix d'une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

Le choix d'une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

scrutin majoritaire simple : d

Le choix d'une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

scrutin majoritaire simple : d
scrutin majoritaire à deux tours : a

Le choix d’une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

scrutin majoritaire simple : d
scrutin majoritaire à deux tours : a
règle de Borda : b

Le choix d'une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

scrutin majoritaire simple : d
scrutin majoritaire à deux tours : a
règle de Borda : b
gagnant de Condorcet : c

Le choix d'une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

scrutin majoritaire simple : d
scrutin majoritaire à deux tours : a
règle de Borda : b
gagnant de Condorcet : c

- Avec un ensemble de préférences individuelles donné, la personne qui choisit la méthode de vote peut décider du résultat.

Autres résultats

- **Théorème d'impossibilité de Gibbard-Satthertwaite**[Gibbard 1973, Satthertwaite 1975]. Toute méthode de vote non dictatoriale est manipulable (ie il est préférable pour au moins un des individus de mentir sur ses préférences).

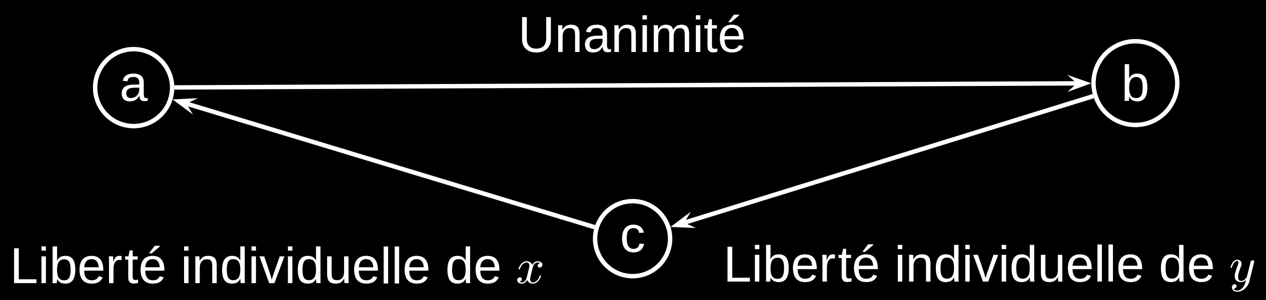
Autres résultats

- **Théorème d'impossibilité de Gibbard-Satthertwaite**[Gibbard 1973, Satthertwaite 1975]. Toute méthode de vote non dictatoriale est manipulable (ie il est préférable pour au moins un des individus de mentir sur ses préférences).
- **A. K. Sen** [Sen, 1978]. On ne peut satisfaire à la fois les propriétés d'unanimité et d'universalité et la propriété de liberté individuelle.

Autres résultats

- 2 hommes sont échoués sur une île déserte : Monsieur x le puritain, et monsieur y le libéral. Dans leur peu de bagages il y a une revue pornographique. Il y a trois alternatives possibles :
  - a : x lit la revue
  - b : y lit la revue
  - c : personne ne lit la revue

  Les préférences des deux individus sont les suivantes :
  x: $cPaPb$
  y: $aPbPc$



Beaucoup d’autres questions...

- Manipulabilité
- Construction de biens publics
- Problèmes de partage
- Procédures de vote par comparaisons successives
- Représentativité dans les institutions (indices de puissance)
- Démocratie directe vs démocratie indirecte
- . . .

Bibliographie

- ▷ K. J. Arrow. **“Social Choice and Individual Values”**. Second Edition. Wiley. 1963.
- ▷ A. K Sen. **“Collective Choice and Social Welfare”**. 1970.
- ▷ H. Moulin. **“Axioms of Cooperative Decision Making”**. Cambridge University Press. 1988
- ▷ J. S. Kelly. **“Arrow’s Impossibility Theorems”**. Academic Press. 1978.
- ▷ J. S. Kelly. **“Social Choice Theory: An Introduction”**. Springer Verlag. 1988.
- ▷ D. Bouyssou, P. Perny. **“Aide multicritère à la décision et théorie du choix social**. Nouvelles de la Science et des Technologie, 15. p 61-72. 1997. (disponible sur le web).

Preuve du théorème d'Arrow

Nous avons d'abord besoin de la définition suivante :

Définition. Un sous-ensemble d'individus V du profil N est dit *décisif pour* (a, b) si lorsque $\forall i \in V \; aP_ib$, alors aPb. C'est-à-dire que si tous les individus de N préfèrent strictement le candidat a au candidat b, alors la société dans son ensemble préférera strictement a à b, quelles que soient les préférences des individus de $N \setminus V$.

Remarque. En utilisant la propriété d'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, il est facile de voir que la définition précédente est équivalente à: N est décisif pour (a, b) si lorsque $\forall i \in V \; aP_ib$ et $\forall j \in N \setminus V bP_ja$, alors aPb. C'est-à-dire que si tous les individus de N préfèrent strictement le candidat a au candidat b et que tous les autres individus préfèrent strictement b à a, alors la société dans son ensemble préférera strictement a à b.

Définition. On appelle ensemble décisif minimal un ensemble $V \subseteq N$ qui est décisif pour une paire (a, b) quelconque et tel que pour toute paire, tout sous-ensemble strict de V n'est pas décisif pour cette paire.

Remarque. Un tel ensemble existe toujours quel que soit le profil N puisque d'après la propriété d'Unanimité l'ensemble N est décisif pour toute paire (a, b).

Remarque. Pour que le théorème d'Arrow s'applique, il faut supposer qu'il y ait au moins 3 candidats (nous avons vu que pour 2 candidats, il n'y avait pas de problème) et qu'il y ait deux individus (ce qui est un minimum lorsque l'on veut agréger). Donc dans les preuves, on peut toujours supposer que l'on a au moins 3 candidats différents.

Preuve du théorème d'Arrow

Lemme. Si V est décisif pour (a, b), alors V est décisif pour toute paire de candidats.

Preuve : Soit le profil suivant (la propriété d'Universalité nous permet de choisir un profil quelconque) :

$$\begin{array}{rcl} V & : & cPaPb \\ N \setminus V & : & bPcPa \end{array}$$

Puisque V est décisif pour (a, b), on a aPb. D'un autre coté, par Unanimité on a cPa. Donc par Transitivité, on a cPb. Et par l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, on a que la préférence globale entre c et b ne dépend pas des autres candidats (en particulier de a). Donc puisque l'on a $\forall i \in V cP_i b$ et $\forall j \in N \setminus V bP_i c$, et que l'on vient de montrer que cPb, cela veut dire que V est décisif pour (c, b) quel que soit c.
De même si on considère le profil :

$$\begin{array}{rcl} V & : & aPbPc \\ N \setminus V & : & bPcPa \end{array}$$

Puisque V est décisif pour (a, b), on a aPb. D'un autre coté, par Unanimité on a bPc. Donc par Transitivité, on a aPc. Donc V est décisif pour (a, c) quel que soit c.
Donc quel que soit la paire de candidats (c, d), l'ensemble V est décisif pour cette paire. $\square$

Preuve du théorème d'Arrow

Lemme. Tout ensemble décisif minimal est un singleton.

Preuve : Soit un ensemble décisif minimal V non singleton. On peut donc partitionner cet ensemble en deux sous-ensembles (non-vides) V_1 et V_2. Soit le profil suivant (la propriété d'Universalité nous permet de choisir un profil quelconque) :

$$\begin{array}{rcl} V_1 & : & aPbPc \\ V_2 & : & bPcPa \\ N \setminus V & : & cPaPb \end{array}$$

Comme V est décisif, on a bPc.
Si aPc, alors V_1 est décisif pour (a, c), donc V_1 est un sous-ensemble décisif de V. Ce qui contredit l'hypothèse que V soit un ensemble décisif minimal.
Donc cRa, mais par Transitivité cela donne bPa, donc V_2 est décisif pour (b, a), donc V_2 est un sous-ensemble décisif de V. Contradiction. $\square$

Théorème d'impossibilité d'Arrow [Arrow, 1951]. Aucune règle de choix social ne satisfait l'Universalité, l'Unanimité, l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, la Transitivité et l'Absence de Dictateur.

Preuve : Pour tout profil N, ce profil est décisif pour tout couple (a, b). Il existe donc un sous-ensemble de N minimal décisif. D'après le lemme précédent cet ensemble est un singleton (dictateur). $\square$