Supplements 3 to Chapter X **E. Gekeler**

11/10/06

Example 1 Gegeben sei das Räuber-Beute-Modell

$$\dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = xy - y\,.$$

(a) Man skizziere das Richtungsfeld im ersten Quadranten der (x, y)-Ebene. Man bestimme alle Gleichgewichtspunkte sowie die Punkte mit waagrechter bzw. senkrechter Tangente.
(b) Man bestimme den Charakter der Gleichgewichtspunkte.
(c) Man bestimme ein erstes Integral $F(x, y)$ über eine exakte Differentialgleichung. Man untersuche die Funktion F auf Extrema. Was folgt daraus f'ur die Lösungskurven?

Lösung: (a) Das System

$$x - xy = 0, \qquad xy - y = 0$$

hat die Lösungen (singuläre Punkte)

$$\underline{x}_1 = (0, 0), \qquad \underline{x}_2 = (1, 1)\,.$$

Punkte mit waagrechter Tangente:

$$\dot{x} \neq 0 \wedge \dot{y} = 0 \Longleftrightarrow (y = 0 \wedge x \neq 0) \vee (x = 1 \wedge y \neq 0\,,\ y \neq 1)\,.$$

Punkte mit senkrechter Tangente:

$$\dot{x} = 0 \wedge \dot{y} \neq 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \wedge y \neq 0) \vee (y = 1 \wedge x \neq 0\,,\ x \neq 1)\,.$$

(b) Die Jacobi-Matrix

$$\nabla \underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 - y & -x \\ y & x - 1 \end{bmatrix}$$

hat in den singulären Punkten die folgenden Eigenwerte:

$$\begin{array}{rcll} \underline{x}_1 & = & (0, 0), \quad \lambda_{1,2} = \pm 1 & \text{Sattelpunkt,} \\ \underline{x}_2 & = & (1, 1), \quad \lambda_{1,2} = \pm i & \text{Zentrum oder Focus.} \end{array}$$

(c) Elimination des Kurvenparameters. Z. B.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}\,.$$

Separation der Veränderlichen ergibt für $x, y > 0$ eine exakte Differentialgleichung

$$\frac{1-y}{y} dy = \frac{x-1}{x} dx \Longleftrightarrow \int \frac{1-y}{y}\, dy = \int \frac{x-1}{x}\, dx \Longleftrightarrow \ln y - y = x - \ln x + c\,.$$

Implizite Darstellung der Lösungskurven:

$$F(x, y) = \ln x + \ln y - x - y = c\,.$$

Außerdem sind die Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$ Lösungen des Differentialsystems und $(x, y) = (1, 1)$ ist singuläre Lösung.

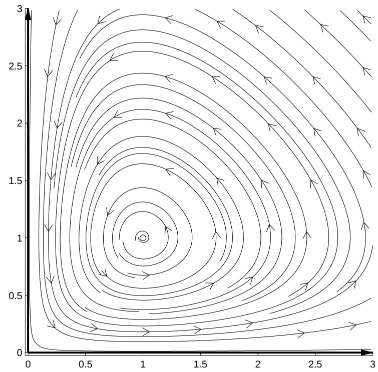
Stationäre Punkte von F für $x,\, y > 0$:

$$F_x = \frac{1}{x} - 1 = 0, \qquad F_y = \frac{1}{y} - 1 = 0\,.$$

Charakter des stationären Punktes $\underline{x}_2 = (1,1)$ über die HESSE-Matrix

$$\nabla\nabla F(x,y) = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 0 & -1/y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da beide Eigenwerte negativ sind liegt in $\underline{x}_2$ ein Hochpunkt vor. Die Lösungskurven $F(x,y) = c$ sind daher im ersten Quadranten geschlossene Kurven. (Die Funktion F ist hier keine HAMILTON-Funktion.)



Example 2 Gegeben sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - x^2 + 2 \\ \dot{y} &= 2xy - 2x \end{aligned}\,.$$

(a) Man bestimme alle singulären Punkte.
(b) Man bestimme den Charakter aller singulären Punkte.
(c) Man skizziere sorgfältig das Phasenbild mit *allen* Separatrizen sowie *allen* Richtungsangaben für wachsendes t.
(d) Kann man Separatrizen (mit einfachen Mitteln) global angeben? (Begründung!)

Lösung: (a) Singuläre Punkte:
Das System

$$2y - x^2 + 2 = 0, \qquad 2x(y-1) = 0\,,$$

hat die Lösungen

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies y = -1 \\ y = 1 &\implies x = 2, \quad x = -2\,. \end{aligned}$$

$$\underline{x}_0 = (0\,,\,-1)\,, \quad \underline{x}_1 = (2\,,\,1)\,, \quad \underline{x}_2 = (-2\,,\,1)\,.$$

(b) JACOBI-Matrix des Vektorfeldes $\underline{v}$:

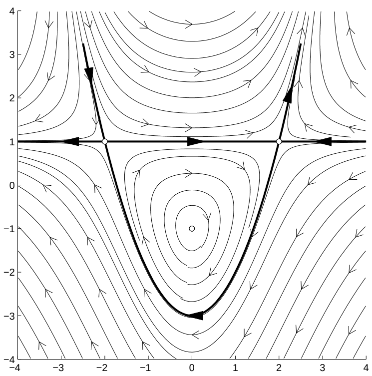
$$\nabla \underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -2x & 2 \\ 2(y-1) & 2x \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \underline{v}(\underline{x}_0) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{EW rein imaginär} \implies \underline{x}_0 \text{ Zentrum} \\
\nabla \underline{v}(\underline{x}_1) &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \implies \text{EW } \lambda_1 = -4\,,\ \lambda_2 = 4 \implies \underline{x}_1 \text{ Sattelpunkt} \\
\nabla \underline{v}(\underline{x}_2) &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \implies \text{EW } \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -4 \implies \underline{x}_2 \text{ Sattelpunkt}
\end{aligned}
$$

(c) Für das Phasenbild müssen die Eigenvektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$ in den Sattelpunkten berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}_1 = (2,1), \quad \lambda_1 = -4, \quad \underline{u} = (1\,, u_2), \begin{bmatrix} -4+4 & 2 \\ 0 & 4+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} = \underline{0} \implies \underline{u} = (1\,,\ 0), \\
&\underline{x}_1 = (2,1), \quad \lambda_2 = 4, \quad \underline{v} = (1\,, v_2), \begin{bmatrix} -4-4 & 2 \\ 0 & 4-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} = \underline{0} \implies \underline{v} = (1\,,\ 4), \\
&\underline{x}_2 = (-2,1), \quad \lambda_1 = 4, \quad \underline{u} = (1\,, u_2), \begin{bmatrix} 4-4 & 2 \\ 0 & -4-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} = \underline{0} \implies \underline{u} = (1\,,\ 0), \\
&\underline{x}_2 = (-2,1), \quad \lambda_2 = -4, \quad \underline{v} = (1\,, v_2), \begin{bmatrix} 4+4 & 2 \\ 0 & 4-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} = \underline{0} \implies \underline{v} = (1\,,\ -4).
\end{aligned}
$$

(d) Für $y = 1$ folgt $\dot{y} = 0$ aus der zweiten Gleichung. Daher sind diejenigen Separatrizen Strecken, bzw. Halbgeraden, die in die beiden Sattelpunkte waagrecht einmünden.



Example 3 Gegeben sei das System von Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y(1-x^2) &=:& \quad H_y(x,y) \\
\dot{y} &= x(y^2-1) &=:& \ -H_x(x,y)
\end{aligned} \quad .
$$

(a) Man bestimme alle singulären Punkte.
(b) Man bestimme den Charakter aller singulären Punkte.
(c) Man berechne die Hamilton-Funktion H.
(d) Für $x > 0$ berechne man die "senkrechten", für $t \to \infty$ bzw. für $t \to -\infty$ gegen einen Sattelpunkt konvergierenden Lösungen (Separatrizen) als *explizite* Funktion der freien Veränderlichen.
(e) Mit Hilfe von (d) beschreibe man die übrigen Separatrizen.

(f) Man skizziere sorgfältig das Phasenbild mit *allen* Separatrizen sowie *allen* Richtungsangaben für wachsendes t.

Lösung: (a) Singuläre Punkte:
Das System

$$y(x^2-1)=0, \qquad x(y^2-1)=0\,,$$

hat die Lösungen

$$\underline{x}_0=(0,0),\ \underline{x}_1=(1\,,\ 1),\ \underline{x}_2=(1\,,\ -1),\ \underline{x}_3=(-1\,,\ 1)\,,\ \underline{x}_4=(-1\,,\ -1)\,.$$

(b) Die JACOBI-Matrix hat an diesen Stellen die Form

$$\nabla\underline{f}(\underline{x}_0)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\ \text{bzw. } \nabla\underline{f}(\underline{x}_{1,4})=\begin{bmatrix}2&0\\0&-2\end{bmatrix},\ \text{oder } \nabla\underline{f}(\underline{x}_{2,3})=\begin{bmatrix}-2&0\\0&2\end{bmatrix},$$

Der Punkt $\underline{x}_0$ ist also ein Wirbelpunkt und die übrigen singulären Punkte sind alle Sattelpunkte.

(c) Durch Integration der ersten Gleichung bezgl. y erhält man

$$\begin{aligned}H(x,y) &= \int y(1-x^2)\,dy=\frac{y^2}{2}(1-x^2)+c(x),\\ H_x(x,y) &= -xy^2+c'(x)\overset{(!)}{=}-x(y^2-1)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt $c(x)=x^2/2-d$, also insgesamt

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-x^2y^2\right)=d\,.$$

(d) Einsetzen von $x=1$ ergibt

$$\dot x=0\,,\qquad \dot y=y^2-1\quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\dot y}{y^2-1}=1\,.$$

Trennung der Veränderlichen ergibt mit Partialbruchzerlegung

$$\frac{\dot y}{y-1}-\frac{\dot y}{y+1}=2\,.$$

Daraus folgt

$$\ln|y-1|-\ln|y+1|=\ln\frac{|y-1|}{|y+1|}=2t+c_1\quad\Longrightarrow\quad\frac{|y-1|}{|y+1|}=c\,e^{2t}\,.$$

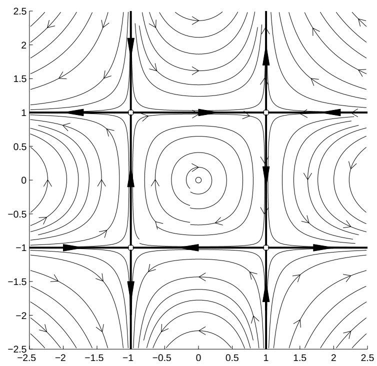
O.B. kann $c=1$ gesetzt werden.

$$y>1\ \Longrightarrow\ y(t)=\frac{1+e^{2t}}{1-e^{2t}}\,,\ -\infty<t<0,\ \Longrightarrow\ \lim{}_{t\to-\infty}y(t)=1\ \ \lim{}_{t\to0-}y(t)=\infty$$

$$y<-1\ \Longrightarrow\ y(t)=\frac{1+e^{2t}}{1-e^{2t}}\,,\ 0<t<\infty,\ \Longrightarrow\ \lim{}_{t\to\infty}y(t)=-1\,,\ \lim{}_{t\to0+}y(t)=-\infty$$

$$|y|<1\ \Longrightarrow\ y(t)=\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\,,\ -\infty<t<\infty,\ \Longrightarrow\ \lim{}_{t\to\infty}y(t)=-1\,,\ \lim{}_{t\to-\infty}y(t)=1\,.$$

(e) Aus Symmetriegründen sind die Separatrizen insgesamt die zwölf *Strecken* und *Halbgeraden*, die aus $y=\pm1$ und $x=\pm1$ durch Wegnahme der singulären Punkte entstehen.



Example 4 Gegeben sei das autonome Differentialsystem $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ mit $\underline{x} = (x, y)$ und der freien Veränderlichen t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xy, \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\,. \end{aligned}$$

(a) Man bestimme alle singulären Punkte.
(b) Man bestimme den Charakter der singulären Punkte.
(c) Die Separatrizen sind hier Strecken oder Halbgeraden. Man skizziere sorgfältig das Phasenbild, d.h. die Lösungskurven in der (x, y)-Eben mit *allen* Richtungsangaben für wachsendes t.

Lösung: (a) Das System

$$-y + xy = 0, \qquad x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = 0$$

hat die Lösungen (singuläre Punkte)

$$\underline{x}_1 = (0,0), \quad \underline{x}_2 = (-2,0), \quad \underline{x}_3 = (1,\sqrt{3}), \quad \underline{x}_4 = (1,-\sqrt{3})\,.$$

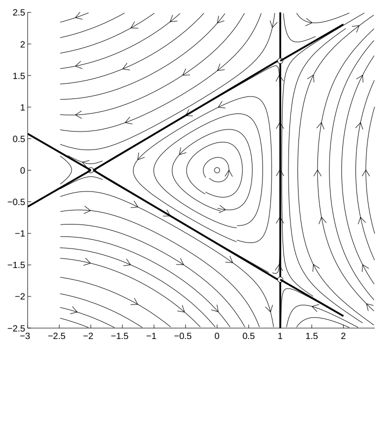
(b) Die JACOBI-Matrix

$$D\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} y & x-1 \\ x+1 & -y \end{bmatrix}$$

hat in den singulären Punkten die folgenden Eigenwerte:

$$\begin{array}{rcllcll} \underline{x}_1 &=& (0,0), & \lambda_{1,2} &=& \pm i, & \text{Wirbelpunkt}, \\ \underline{x}_2 &=& (-2,0), & \lambda_{1,2} &=& \pm 2, & \text{Sattelpunkt}, \\ \underline{x}_{3,4} &=& (1,\pm\sqrt{3}), & \lambda_{1,2} &=& \pm\sqrt{3}, & \text{Sattelpunkte}. \end{array}$$

(c) Z. B. gelten an der Stelle $\underline{x} = (1,0)$ für die Ableitungen nach t die Gleichungen $(\dot{x}, \dot{y}) = (0,1)$. Damit und mit **(b)** hat das Phasenbild die angegebene Form.



Example 5 [Hale] Gegeben sei das autonome System von Differentialgleichungen in Polarkoordinaten,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r)\\ \dot{\varphi} &= \sin^2(\varphi) + (1-r)^3\,.\end{aligned}$$

(a1) Man bestimme die singulären (r, φ)-Ebene.
(a2) Man bestimme die singulären Punkte in der (x, y)-Ebene.
(a3) Welche Lösungen lassen sich vollständig beschreiben. (b) Wie verhalten sich die L"osungen für $t \to \infty$? Hinweis. Es gilt

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + \text{ konst}\,.$$

(c) Man skizziere das Phasenbild mit Richtungsangaben für wachsendes t ohne Bestimmung des Charakters der singulären Punkte.
(d) Man bestimme den Charakter der singulären Punkte und vervollständige das Phasenbild.

Lösung:
Vorbemerkung:
(1) Das exakte Phasenbild oder Phasenporträt l"asst sich nur mit Hilfe von Lösungen erstellen. Bei Aufgaben dieser Art soll das *qualitative* Lösungsverhalten in der *Nähe* der "Ausnahmestellen" beschrieben werden. Es ist i.A. nicht nach dem globalen Schaubild gefragt.
(2) Das System der Polarkoordinaten besteht aus dem Punkt $r = 0$ und den Punkten $\{r,\, \varphi),\ r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

(a1) Das System

$$r(1-r) = 0\,, \qquad \sin^2(\varphi) + (1-r)^3 = 0$$

hat die Lösungen (kritische oder singuläre Punkte)

$$P_1:\ r_1 = 0, \quad P_2:\ (r, \varphi) = (1, 0), \quad P_3:\ (r, \varphi) = (1, \pi)\,.$$

(a2) In kartesischen Koordinaten sind dies die Punkte

$$\underline{x}_1 = (0, 0), \quad \underline{x}_2 = (1, 0), \quad \underline{x}_3 = (-1, 0)$$

(a3) Nach Definition ist der Graph einer jeden Lösungskurve eine invariante Menge. Vollständig beschreiben als invariante Menge lassen sich die singulären Punkte sowie die obere und die untere Hälfte des Einheitskreises.

(b1) Im Innern des Einheitskreises ohne Ursprung ist $\dot{r} > 0$ und $\dot{\varphi} > 0$, daher ist der Ursprung ein instabiler Strudel mit Drehung links herum.
(b2) Im äusseren des Einheitskreises ist $\dot{r} < 0$, daher konvergieren alle Kurven für wachsendes t gegen den Einheitskreis, weil es keine weiteren invarianten Mengen ausserhalb des Einheitskreises gibt.
(b3) *Auf* dem Einheitskreis gilt

$$\dot{\varphi} = \sin^2(\varphi)$$

Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} = \int_{t_0}^{t} dt\,.$$

Weil der Cotangens π-periodisch ist, folgt daraus (!)

$$\cot\varphi(t) - \cot\varphi(t_0) = t_0 - t \quad \text{für} \quad 0 < \varphi, \varphi_0 < \pi \quad \text{und für} \quad \pi < \varphi, \varphi_0 < 2\pi\,,$$

also

$$\begin{array}{rcll} \varphi(t) & = & \operatorname{arccot}(\cot\varphi(t_0) + t_0 - t) & \text{für} \;\; 0 < \varphi, \varphi_0 < \pi \\ \varphi(t) & = & \operatorname{arccot}(\cot\varphi(t_0) + t_0 - t) + \pi & \text{für} \;\; \pi < \varphi, \varphi_0 < 2\pi\,, \end{array}$$

Wegen $\lim_{t\to\infty} \operatorname{arccot}(-t) = \pi$ folgt

$$\begin{array}{rcll} \lim_{\,t\to\infty}\varphi(t) & = & \pi & \text{für} \;\; 0 < \varphi < \pi \\ \lim_{\,t\to\infty}\varphi(t) & = & 2\pi & \text{für} \;\; \pi < \varphi < 2\pi. \end{array}$$

Folgerung:
Die obere und untere Hälfte des Einheitskreise werden in positiver Richtung durchlaufen.
Alle Lösungskurven konvergieren gegen den Einheitskreis. Fraglich ist noch, ob dies spiralförmig geschieht oder nicht.

(c) Vorläufige SKIZZE!

(d) An der Stelle $r = 0$ spielt der Winkel φ keine Rolle. Für die Gleichung $\dot r = f(r) := r - r^2$ folgt $\nabla f(0) \equiv f'(0) = 1$, also ist dieser singuläre Punkt instabil.
Für den Einheitskreis berechnet man

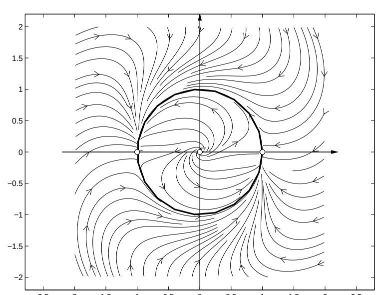
$$\nabla \underline{v}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 - 2r & 0 \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & -3(1-r)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Dies ist also ein Sonderfall mit einem Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Vgl. MV II, §9.9.5. Es folgt aber, dass der Einheitskreis eine stabile Menge ist, weil der von Null verschiedene Eigenwert negativ ist. Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, also in den singulären Punkten, ist die Matrix eine Diagonalmatrix mit den Eigenvektoren

$$[r_1\,,\ \varphi_1] = [1\,,\ 0]\,, \quad [r_2\,,\ \varphi_2] = [0\,,\ 1]\,.$$

in der (r,φ)-Ebene. Die Richtung der Separatrizen verläuft also entweder senkrecht (klar) oder waagrecht (aus Symmetriegründen anzunehmen, aber nicht klar). Daher werden die Lösungskurven in der Nähe der singulären Punkte durch die Separatrizen abgeriegelt. Sie können also nicht spiralförmig verlaufen. Weil ausserhalb der singulären Punkte auf dem Einheitskreis stets $\dot\varphi > 0$ gilt, müssen alle Lösungskurven entweder von oben in den linken kritischen Punkt oder von unten in den rechten kritischen Punkt laufen.

Zusatz: Das Problem lässt sich explizit lösen!



Example 6 Gegeben sei das autonome System mit der freien Veränderlichen t:

$$\dot{x} = y(1-x),\ \dot{y} = x(y-1).$$

(a) Man bestimme die Gleichgewichtspunkte (singulären Punkte) und ihren Charakter.
(b) Man bestimme eine stetig differenzierbare Funktion F so, dass die Phasenkurven durch $F(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}$, beschrieben werden.
(c) Man skizziere das Phasenbild, d.h. die Lösungskurven in der (x,y)-Ebene. Man kennzeichne insbesondere Lösungskurven, die für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ gegen einen endlichen Wert konvergieren.
(d) Man stelle diese für $t \to +\infty$ bzw. für $t \to -\infty$ konvergenten Lösungen jeweils explizit als Funktionen des Parameters t dar.

Lösung: (a) Das System

$$y(1-x) = 0, \qquad x(y-1) = 0$$

hat die Lösungen (singuläre Punkte)

$$\underline{x}_1 = (0,0), \qquad \underline{x}_2 = (1,1)\,.$$

Die Jacobi-Matrix oder *Funktionalmatrix*

$$\nabla \underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -y & 1-x \\ y-1 & x \end{bmatrix}$$

hat in den singulären Punkten die folgenden Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= (0,0), \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad \text{Wirbelpunkt}, \\ \underline{x}_2 &= (1,1), \quad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \text{Sattelpunkt}. \end{aligned}$$

(b) Vorbemerkung und Erinnerung:

$$\begin{aligned} y > 1: \quad \int \frac{1}{y-1}\,dy &= \ln(y-1) + c \\ y < 1: \quad \int \frac{1}{y-1}\,dy &= -\int \frac{1}{1-y}\,dy = \ln(1-y) + c \\ x > 1: \quad \int \frac{1}{1-x}\,dx &= -\int \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln(x-1) + c \\ x < 1: \quad \int \frac{1}{1-x}\,dx &= -\ln(1-x) + c\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $x \neq 1,\ y \neq 1$

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \ln|y-1| + c, \qquad \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + c\,.$$

Elimination des Kurvenparameters t. Z. B. gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x(y-1)}{y(1-x)}$$

ausserhalb der singulären Punkte. Es folgt die exakte DGl.

$$\frac{y}{y-1}\,dy = \frac{x}{1-x}\,dx \implies \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) dy = \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) dx$$

$$\implies y + \ln|y-1| = -x - \ln|1-x| + c$$

Die Lösungskurven sind also implizit gegeben durch

$$F(x,y) = \ln|y-1| + \ln|1-x| + y + x = c\,.$$

(c) Im Sattelpunkt hat der Eigenwert $\lambda = -1$ den Eigenvektor $\underline{e}_1$ und der Eigenwert $\lambda_2 = 1$ den Eigenvektor $\underline{e}_2$ (Separatrizen!) Damit kann man das Phasenbild vollständig beschreiben.

(d) Für $x = 1$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung

$$\dot{y} = y - 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y-1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = 1 + c\,e^t \quad \text{o.B.} \quad c = \pm 1\,,$$

also insgesamt die Lösungskurven $\underline{x}(t) = (1\,,\ 1 \pm e^t)$.
Ebenso ergeben sich für $y = 1$ die Lösungskurven $\underline{x}(t) = (1 \pm e^{-t}, 1)$. Diese Kurven haben als Separatrizen die genannten Eigenschaften. Damit kann man das Phasenbild noch präzisieren.