

Eckart W. Gekeler

Mathematische Methoden zur Mechanik

Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten

Mit 185 Abbildungen

4. April 2006

Springer

Berlin Heidelberg New York

Hong Kong London

Milan Paris Tokyo

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Mathematische Hilfsmittel	1
§1. Zur Matrizenrechnung	1
Vektor- und Matrixprodukte – Determinanten und Kofaktoren – Eigenwerte und Eigenvektoren – Zerlegungen einer Matrix – Lineare Gleichungssysteme – Projektoren und Reflektoren – Der QR-Algorithmus – Die MOORE-PENROSE-Inverse – Über- und unterbestimmte Systeme – Drehung im \mathbb{R}^3 – Matrizen mit definitem Realteil	
§2. Formeln der Vektoranalysis	17
Bezeichnungen und Definitionen – Differential-Rechenregeln – Integral-Rechenregeln – Koordinatenunabhängige Definitionen – Potentiale und Vektorfelder	
§3. Kurven im \mathbb{R}^3	24
Krümmung und Torsion – FRENETSche Formeln	
§4. Lineare Differentialgleichungen	27
Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten – Die allgemeine Lösung	
§5. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung	31
Autonome homogene Systeme mit diagonalisierbarer Matrix – Autonome homogene Systeme mit nichtdiagonalisierbarer Matrix – Stabilität – Allgemeine lineare Systeme – Spezielle rechte Seiten – Randwertprobleme – Periodische Lösungen	
§6. Der Fluss und sein Vektorfeld	38
Das Flussintegral – Stationäre Vektorfelder – Begradigung von Vektorfeldern – Transformation – Beispiele	

§7. Vektorräume	44
Räume stetiger Funktionen – BANACH-Räume – Lineare Abbildungen – Lineare Funktionale und Hyperebenen – Der Dualraum – HILBERT- Räume – SOBOLEV-Räume – Annahme von Randwerten – Eigenschaften von $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$ – Äquivalente Normen auf $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$	
§8. Ableitungen	51
GATEAUX-Ableitung, FRÉCHET-Ableitung – Eigenschaften – Beispiele	
§9. Abbildungen in Banach-Räumen	56
Lineare Operatoren – Projektoren – Implizite Funktionen	
§10. Konvexe Mengen und Funktionen	60
Konvexe Mengen und Kegel – Trennungssätze – Kegeleigenschaften – Konvexe Funktionen	
§11. Quadratische Funktionale	68
Das Energiefunktional – Operatoren im HILBERT-Raum – Projektoren im HILBERT-Raum – Eigenschaften des Energiefunktionals – Die RITZ- Näherung	
Kapitel 2. Numerische Methoden	77
§1. Interpolation und Approximation	78
Das allgemeine Interpolationsproblem – Interpolationspolynome – Inter- polation nach LAGRANGE – Interpolation nach NEWTON – Hinzunahme der Ableitungen – Approximation mit BEZIÉR-Polynomen – Interpola- tionsplines	
§2. Orthogonale Polynome	88
Konstruktion – Die Formeln von RODRIGUEZ – Minimaleigenschaft von TSCHEBYSCHJEFF-Polynomen	
§3. Numerische Integration	93
Quadratur nach LAGRANGE – Summierte Quadraturformeln – Quadra- tur nach GAUSS – Suboptimale Quadraturformeln – Gebietsintegrale – Natürliche Koordinaten im Dreieck – Polynome im Dreieck – Numeri- sche Quadraturformeln im Dreieck	
§4. Anfangswertprobleme	104
Das EULER-Verfahren – Allgemeine Einschrittverfahren – Asymptoti- sche Entwicklung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Mehrstellenverfahren – Zusammenfassung – Stabilität – Steife Systeme – Weitere Beispiele – Voll implizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
§5. Randwertprobleme	127
Das lineare Problem – Nichlinearer Fall – Randwertprobleme mit Para- meter	
§6. Periodische Probleme	131
Probleme mit bekannter Periode – Probleme mit unbekannter Periode	

§7. **Differential-algebraische Probleme**134
 Problemstellung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Reguläre Matrizenpaare
 – Differentialindex – Halb-explizite RUNGE-KUTTA-Verfahren

§8. **Hinweise zu den MATLAB-Programmen**140

Kapitel 3. Optimierung 141

§1. **Minimierung einer Funktion**142
 Abstiegsverfahren – Negative Beispiele – Konvergenz – Effiziente Wahl
 der Abstiegsrichtung – NEWTON-Verfahren

§2. **Extrema mit Nebenbedingungen**147
 Problemstellung – Multiplikatorregel

§3. **Lineare Optimierung** 152
 Beispiele – Problemstellung – Projektionsverfahren – Algorithmus – De-
 generierte Ecken – Mehrere Lösungen – Gleichungsrestriktionen – Sen-
 sitivität – Duales Problem – Das Tableau – Beispiel

§4. **Linear-quadratische Probleme**162
 Das primale Verfahren – Der Algorithmus PLQP.M – Das duale Verfahren
 – Der Algorithmus DLQP.M – V-Tripel und L-Paar – Beispiel zum dualen
 Verfahren

§5. **Nichtlineare Optimierung**167
 Das Gradientenverfahren – Typischer Iterationsschritt – Restoration –
 Strafkostenverfahren – Der Algorithmus SQP.M –Zusätze – Beispiele

§6. **Abriss der Lagrange-Theorie** 174
 Problemstellung – LAGRANGE-Problem – Sattelpunktprobleme – Pri-
 male und duale Probleme – Zusammenfassung – Geometrische Deutung
 – Lokale LAGRANGE-Theorie – Beispiele

§7. **Hinweise zu den MATLAB-Programmen**188

Kapitel 4. Wackeln mit System189

§1. **Variationsrechnung** 190
 Extremalproblem und Randwertproblem – Modifizierte Problemstel-
 lung – Variabler Endpunkt – Numerische Behandlung – LEGENDRE-
 Transformation – LAGRANGE-Funktion und HAMILTON-Funktion – Bei-
 spiele

§2. **Kontrollprobleme ohne Restriktionen** 203
 Problemstellung – Freier Planungshorizont – Die freien LAGRANGE-
 Multiplikatoren – Der Kozustand – Maximumprinzip

§3. **Kontrollprobleme mit Restriktionen**209
 Problemstellung – Notwendige Bedingungen – Maximumprinzip

§4. Beispiele	214
Numerische Behandlung – Beispiele – Abbildungen	
§5. Zum Re-Entry Problem	224
§6. Hinweise zu den MATLAB-Programmen	228
Kapitel 5. Der Weg als Ziel	229
§1. Verzweigungsprobleme	231
FREDHOLM-Operatoren – LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Klassifizierung – Bifurkationsgleichung – Symmetrie – Beispiele	
§2. Wendepunkte	243
Wendepunkte – Charakterisierung von Wendepunkten – Berechnung von Wendepunkten	
§3. Verzweigungspunkte	245
Verzweigungspunkte der nichtseparierten Form – Weitere Klassifizierung und Charakterisierung – Berechnung von Verzweigungspunkten vom Typ I – Berechnung von Verzweigungspunkten vom Typ II	
§4. Skalierung	252
Modifizierte LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Zwei Beispiele mit nichtdiagonalisierbarer Matrix L – Homogene Probleme – Das nichtlineare Eigenwertproblem – Das gestörte Eigenwertproblem – Allgemeine Verzweigungspunkte	
§5. Gewöhnliche Differentialsysteme	263
Das lineare Randwertproblem – Das adjungierte Randwertproblem – Nichtlineare Randwertprobleme – Zur Stabilität – Beispiel	
§6. Hopf-Verzweigung	270
Problemstellung – Einfache Beispiele – Das Eigenwertproblem – Diskretisierung – Numerische Lösung – Beispiele	
§7. Numerische Bifurkation	282
Das nichtlineare Eigenwertproblem – Allgemeine Probleme – Ein klassisches Beispiel	
§8. Fortsetzung	289
Problemstellung – Prädiktorschritt – Korrektorschritt – Beispiele	
§9. Hinweise zu den MATLAB-Programmen	295
Kapitel 6. Massepunkte und starre Körper	297
§1. Die Kraft und ihr Moment	297
§2. Dynamik eines Massepunktes	300
Bewegungsgleichung – Energie – Systeme mit einem Freiheitsgrad – Starre Drehung	
§3. Massepunkt im Zentralfeld	307
Zentralfelder – KEPLER-Problem – Numerische Lösung	

§4. System von Massepunkten	314
Bewegungsgleichungen – Potentielle Energie – Invarianten – Schwerpunkt	
§5. Dreikörperproblem	323
Problemstellung – Eingeschränktes Dreikörperproblem – Periodische Lösungen	
§6. Drehendes Bezugssystem	326
Drehung einer Basis – Zwei Drehungen – Bewegung im drehenden System – CORIOLIS-Kräfte	
§7. Trägheitstensor und Kreisel	332
Trägheitstensor – Starrer Körper mit ruhendem Punkt – Rotoren – Der kräftefreie Kreisel – Der kräftefreie symmetrische Kreisel – Der geführte symmetrische Kreisel – Kinematische EULER-Gleichungen – Der schwere symmetrische Kreisel	
§8. Zur Behandlung von Mehrkörperproblemen	343
§9. Hinweise zu den MATLAB-Programmen	347
Kapitel 7. Stäbe und Balken	349
§1. Balkenbiegung	349
Zugstab – Balkenbiegung – Gesamtenergie – Variationsproblem und Randwertproblem – Momentengleichung – Weitere Randbedingungen – Existenz der Lösung	
§2. Eigenwertprobleme	358
Verallgemeinertes Eigenwertproblem – Knicklasten	
§3. Numerische Behandlung	363
Zugstab – Biegebalken – Beispiele	
§4. Stabwerke	366
Zugstab in allgemeiner Lage – ebene und räumliche Stabwerke – Lagerbedingungen – Lagerkräfte – Beispiele	
§5. Balkenwerke	372
Torsion – Gesamtenergie – Balken mit Biegung und Torsion in fast allgemeiner Lage – Numerische Approximation	
§6. Hinweise zu den MATLAB-Programmen	377
Kapitel 8. Kontinuumstheorie	379
§1. Deformationen	379
Deformation – Ableitung des Gradienten – Materialableitung (substantielle Ableitung) – PIOLA-Transformation – Zurückholen des Divergenzsatzes	
§2. Die drei Transporttheoreme	386
§3. Die Erhaltungssätze	388
Massen-, Impuls-, Drehimpuls-, Energieerhaltungssatz – Erhaltungssätze in Differentialform – Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	

§4. Materialformen	395
§5. Über Prinzipien der Mechanik	398
Extremalprinzip – Prinzip von D’ALEMBERT – – Prinzip von HAMILTON	
§6. Lineare Elastizitätstheorie	402
Verzerrungstensor und Spannungstensor – Extremalproblem und Variationsproblem – ST.VENANT-KIRCHHOFF-Material	
§7. Scheiben	407
Ebener Spannungszustand – Ebener Verzerrungszustand	
§8. Die Kirchhoff-Platte	409
Extremalproblem und Variationsproblem – Umwandlung – Randwertproblem – Randbedingungen – Beispiel	
§9. Stark gebogene Platten und Membran	416
§10. Flüssigkeiten und Gase	419
Erhaltungssätze – Bezeichnungen – Erhaltungsgleichungen für zähe Fluide	
§11. Navier-Stokes-Gleichungen	422
Geschwindigkeits-Druck-Form – Randwertproblem – Dimensionsfreies System – Stromfunktion-Wirbel-Form – Zusammenhang mit der Plattengleichung	
Kapitel 9. Finite Elemente	429
§1. Elliptische Randwertprobleme	429
Das Extremalproblem – Die schwache Form – Das Randwertproblem – Lösbarkeit	
§2. Von der Formel zum Bild	433
Problemstellung – Approximation – lineare Dreieckselemente – Implementierung von DIRICHLET-Randbedingungen – Implementierung von CAUCHY-Randbedingungen – Beispiel	
§3. Konstruktion von Finiten Elementen	438
Problemstellung – Reduktion auf das Einheitsdreieck – Beispiel – Formfunktionen – Natürliche Koordinaten im Dreieck	
§4. Weitere Konstruktionselemente	446
HERMITESche Elemente – Finite Elemente für Scheiben – Ein kubisches Dreieckelement für Platten – Ein Dreieckelement mit gebogenem Rand – Das ARGYRIS-Element	
§5. Singuläre Elemente	457
§6. Navier-Stokes-Gleichungen	462
Geschwindigkeits-Druck-Form – allgemeine Form für inkompressible Fluide – Approximation – Stromfunktion-Wirbel-Form – Gekoppeltes System – Randbedingungen	
§7. Vermischte Anwendungen	474
Wärmeleitung – Konvektionsströmungen – Massentransport – Flachwasserprobleme	

§8. **Beispiele** 481
 Navier-Stokes-Gleichungen – Konvektion – Flachwasserprobleme

§9. **Hinweise zu den MATLAB-Programmen** 491

Kapitel 10. Abriss der Tensorrechnung 497

§1. **Tensoralgebra** 497
 Basis- und Komponententransformation – Skalarprodukträume – Identifizierung von V und V_d – Allgemeine Tensoren – Darstellung und Transformation von Tensoren – Tensorprodukt – Der Vektorraum der Tensoren – Transformation von allgemeinen Tensoren – Verjüngung (Kontraktion) – Skalarprodukt von Tensoren – Herauf- und Herunterziehen von Indizes – Beispiele

§2. **Algebra alternierender Tensoren** 515
 Alternierende Tensoren – Alternierender Anteil von Tensoren – Äußeres Produkt von Tensoren – Basis – Darstellung alternierender Tensoren – Basistransformation – Skalarprodukt alternierender Tensoren

§3. **Differentialformen im \mathbb{R}^n** 521
 Der abstrakte Tangentialraum und PFAFFSche Formen – Differentialformen – Äußere Ableitung – Geschlossene und exakte Formen – HODGE-Stern-Operator und Integralsätze – Abbildungen – „Pull back“ und „Push forward“

§4. **Tensoranalysis** 534
 EUKLIDISCHE Mannigfaltigkeiten – Natürliche Koordinatensysteme – Darstellung und Transformation – CHRISTOFFEL-Symbole – Divergenz eines Skalarfeldes – Gradienten eines Tensors – Divergenz eines Tensorfeldes – Rotation eines Vektorfeldes

§5. **Beispiele** 549
 Orthogonale natürliche Koordinatensysteme – Divergenz und Rotation

§6. **Transformationsgruppen** 554
 Bezeichnungen und Definitionen – Beispiele – Einparametrische Transformationsgruppen – Die Erzeugende einer Gruppe

Kapitel 11. Fallstudien 561

§1. **Ein Beispiel aus der Gasdynamik** 561

§2. **Die Reissner-Mindlin-Platte** 563

§3. **Beispiele zu Mehrkörperproblemen** 565
 Doppelpendel – Siebenkörperproblem (ANDREW'S Squeezer) – Roboter nach SCHIEHLEN

§4. **Tanzende Scheiben** 568
 Allgemeine Scheiben – Zahnräder mit Nullverzahnung

Kapitel 12. Anhang	575
§1. Bezeichnungen und Tabellen	575
Bezeichnungen – Maßeinheiten und physikalische Konstanten – Grundmatrizen für den quadratischen Ansatz – Formfunktionen für den vollständigen kubischen Ansatz	
§2. Matrizen-Zoo	579
§3. Translation und Drehung	580
§4. Trigonometrische Interpolation	582
§5. Der Dualraum des $C[a, b]$	587
§6. Zykloiden	589
Literaturverzeichnis	593
Sachverzeichnis	603