

Eckart W. Gekeler

# Mathematische Methoden zur Mechanik

Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten

Mit 185 Abbildungen

4. April 2006

Springer

Berlin Heidelberg New York

Hong Kong London

Milan Paris Tokyo



---

## Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Mathematische Hilfsmittel</b> .....	1
<b>§1. Zur Matrizenrechnung</b> .....	1
Vektor- und Matrixprodukte – Determinanten und Kofaktoren – Eigenwerte und Eigenvektoren – Zerlegungen einer Matrix – Lineare Gleichungssysteme – Projektoren und Reflektoren – Der QR-Algorithmus – Die MOORE-PENROSE-Inverse – Über- und unterbestimmte Systeme – Drehung im $\mathbb{R}^3$ – Matrizen mit definitem Realteil	
<b>§2. Formeln der Vektoranalysis</b> .....	17
Bezeichnungen und Definitionen – Differential-Rechenregeln – Integral-Rechenregeln – Koordinatenunabhängige Definitionen – Potentiale und Vektorfelder	
<b>§3. Kurven im <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	24
Krümmung und Torsion – FRENETSche Formeln	
<b>§4. Lineare Differentialgleichungen</b> .....	27
Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten – Die allgemeine Lösung	
<b>§5. Lineare Differentialsysteme erster Ordnung</b> .....	31
Autonome homogene Systeme mit diagonalisierbarer Matrix – Autonome homogene Systeme mit nichtdiagonalisierbarer Matrix – Stabilität – Allgemeine lineare Systeme – Spezielle rechte Seiten – Randwertprobleme – Periodische Lösungen	
<b>§6. Der Fluss und sein Vektorfeld</b> .....	38
Das Flussintegral – Stationäre Vektorfelder – Begradigung von Vektorfeldern – Transformation – Beispiele	

<b>§7. Vektorräume</b> .....	44
Räume stetiger Funktionen – BANACH-Räume – Lineare Abbildungen – Lineare Funktionale und Hyperebenen – Der Dualraum – HILBERT- Räume – SOBOLEV-Räume – Annahme von Randwerten – Eigenschaften von $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$ – Äquivalente Normen auf $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$	
<b>§8. Ableitungen</b> .....	51
GATEAUX-Ableitung, FRÉCHET-Ableitung – Eigenschaften – Beispiele	
<b>§9. Abbildungen in Banach-Räumen</b> .....	56
Lineare Operatoren – Projektoren – Implizite Funktionen	
<b>§10. Konvexe Mengen und Funktionen</b> .....	60
Konvexe Mengen und Kegel – Trennungssätze – Kegeleigenschaften – Konvexe Funktionen	
<b>§11. Quadratische Funktionale</b> .....	68
Das Energiefunktional – Operatoren im HILBERT-Raum – Projektoren im HILBERT-Raum – Eigenschaften des Energiefunktionals – Die RITZ- Näherung	
<b>Kapitel 2. Numerische Methoden</b> .....	77
<b>§1. Interpolation und Approximation</b> .....	78
Das allgemeine Interpolationsproblem – Interpolationspolynome – Inter- polation nach LAGRANGE – Interpolation nach NEWTON – Hinzunahme der Ableitungen – Approximation mit BEZIÉR-Polynomen – Interpola- tionsplines	
<b>§2. Orthogonale Polynome</b> .....	88
Konstruktion – Die Formeln von RODRIGUEZ – Minimaleigenschaft von TSCHEBYSCHJEFF-Polynomen	
<b>§3. Numerische Integration</b> .....	93
Quadratur nach LAGRANGE – Summierte Quadraturformeln – Quadra- tur nach GAUSS – Suboptimale Quadraturformeln – Gebietsintegrale – Natürliche Koordinaten im Dreieck – Polynome im Dreieck – Numeri- sche Quadraturformeln im Dreieck	
<b>§4. Anfangswertprobleme</b> .....	104
Das EULER-Verfahren – Allgemeine Einschrittverfahren – Asymptoti- sche Entwicklung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Mehrstellenverfahren – Zusammenfassung – Stabilität – Steife Systeme – Weitere Beispiele – Voll implizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
<b>§5. Randwertprobleme</b> .....	127
Das lineare Problem – Nichlinearer Fall – Randwertprobleme mit Para- meter	
<b>§6. Periodische Probleme</b> .....	131
Probleme mit bekannter Periode – Probleme mit unbekannter Periode	

§7. **Differential-algebraische Probleme** .....134  
 Problemstellung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Reguläre Matrizenpaare  
 – Differentialindex – Halb-explizite RUNGE-KUTTA-Verfahren

§8. **Hinweise zu den MATLAB-Programmen** .....140

**Kapitel 3. Optimierung** ..... 141

§1. **Minimierung einer Funktion** .....142  
 Abstiegsverfahren – Negative Beispiele – Konvergenz – Effiziente Wahl  
 der Abstiegsrichtung – NEWTON-Verfahren

§2. **Extrema mit Nebenbedingungen** .....147  
 Problemstellung – Multiplikatorregel

§3. **Lineare Optimierung** ..... 152  
 Beispiele – Problemstellung – Projektionsverfahren – Algorithmus – De-  
 generierte Ecken – Mehrere Lösungen – Gleichungsrestriktionen – Sen-  
 sitivität – Duales Problem – Das Tableau – Beispiel

§4. **Linear-quadratische Probleme** .....162  
 Das primale Verfahren – Der Algorithmus PLQP.M – Das duale Verfahren  
 – Der Algorithmus DLQP.M – V-Tripel und L-Paar – Beispiel zum dualen  
 Verfahren

§5. **Nichtlineare Optimierung** .....167  
 Das Gradientenverfahren – Typischer Iterationsschritt – Restoration –  
 Strafkostenverfahren – Der Algorithmus SQP.M –Zusätze – Beispiele

§6. **Abriss der Lagrange-Theorie** ..... 174  
 Problemstellung – LAGRANGE-Problem – Sattelpunktprobleme – Pri-  
 male und duale Probleme – Zusammenfassung – Geometrische Deutung  
 – Lokale LAGRANGE-Theorie – Beispiele

§7. **Hinweise zu den MATLAB-Programmen** .....188

**Kapitel 4. Wackeln mit System** .....189

§1. **Variationsrechnung** ..... 190  
 Extremalproblem und Randwertproblem – Modifizierte Problemstel-  
 lung – Variabler Endpunkt – Numerische Behandlung – LEGENDRE-  
 Transformation – LAGRANGE-Funktion und HAMILTON-Funktion – Bei-  
 spiele

§2. **Kontrollprobleme ohne Restriktionen** ..... 203  
 Problemstellung – Freier Planungshorizont – Die freien LAGRANGE-  
 Multiplikatoren – Der Kozustand – Maximumprinzip

§3. **Kontrollprobleme mit Restriktionen** .....209  
 Problemstellung – Notwendige Bedingungen – Maximumprinzip

§4. <b>Beispiele</b> .....	214
Numerische Behandlung – Beispiele – Abbildungen	
§5. <b>Zum Re-Entry Problem</b> .....	224
§6. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	228
<b>Kapitel 5. Der Weg als Ziel</b> .....	229
§1. <b>Verzweigungsprobleme</b> .....	231
FREDHOLM-Operatoren – LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Klassifizierung – Bifurkationsgleichung – Symmetrie – Beispiele	
§2. <b>Wendepunkte</b> .....	243
Wendepunkte – Charakterisierung von Wendepunkten – Berechnung von Wendepunkten	
§3. <b>Verzweigungspunkte</b> .....	245
Verzweigungspunkte der nichtseparierten Form – Weitere Klassifizierung und Charakterisierung – Berechnung von Verzweigungspunkten vom Typ I – Berechnung von Verzweigungspunkten vom Typ II	
§4. <b>Skalierung</b> .....	252
Modifizierte LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Zwei Beispiele mit nichtdiagonalisierbarer Matrix $L$ – Homogene Probleme – Das nichtlineare Eigenwertproblem – Das gestörte Eigenwertproblem – Allgemeine Verzweigungspunkte	
§5. <b>Gewöhnliche Differentialsysteme</b> .....	263
Das lineare Randwertproblem – Das adjungierte Randwertproblem – Nichtlineare Randwertprobleme – Zur Stabilität – Beispiel	
§6. <b>Hopf-Verzweigung</b> .....	270
Problemstellung – Einfache Beispiele – Das Eigenwertproblem – Diskretisierung – Numerische Lösung – Beispiele	
§7. <b>Numerische Bifurkation</b> .....	282
Das nichtlineare Eigenwertproblem – Allgemeine Probleme – Ein klassisches Beispiel	
§8. <b>Fortsetzung</b> .....	289
Problemstellung – Prädiktorschritt – Korrektorschritt – Beispiele	
§9. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	295
<b>Kapitel 6. Massepunkte und starre Körper</b> .....	297
§1. <b>Die Kraft und ihr Moment</b> .....	297
§2. <b>Dynamik eines Massepunktes</b> .....	300
Bewegungsgleichung – Energie – Systeme mit einem Freiheitsgrad – Starre Drehung	
§3. <b>Massepunkt im Zentralfeld</b> .....	307
Zentralfelder – KEPLER-Problem – Numerische Lösung	

§4. <b>System von Massepunkten</b> .....	314
Bewegungsgleichungen – Potentielle Energie – Invarianten – Schwerpunkt	
§5. <b>Dreikörperproblem</b> .....	323
Problemstellung – Eingeschränktes Dreikörperproblem – Periodische Lösungen	
§6. <b>Drehendes Bezugssystem</b> .....	326
Drehung einer Basis – Zwei Drehungen – Bewegung im drehenden System – CORIOLIS-Kräfte	
§7. <b>Trägheitstensor und Kreisel</b> .....	332
Trägheitstensor – Starrer Körper mit ruhendem Punkt – Rotoren – Der kräftefreie Kreisel – Der kräftefreie symmetrische Kreisel – Der geführte symmetrische Kreisel – Kinematische EULER-Gleichungen – Der schwere symmetrische Kreisel	
§8. <b>Zur Behandlung von Mehrkörperproblemen</b> .....	343
§9. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	347
<b>Kapitel 7. Stäbe und Balken</b> .....	349
§1. <b>Balkenbiegung</b> .....	349
Zugstab – Balkenbiegung – Gesamtenergie – Variationsproblem und Randwertproblem – Momentengleichung – Weitere Randbedingungen – Existenz der Lösung	
§2. <b>Eigenwertprobleme</b> .....	358
Verallgemeinertes Eigenwertproblem – Knicklasten	
§3. <b>Numerische Behandlung</b> .....	363
Zugstab – Biegebalken – Beispiele	
§4. <b>Stabwerke</b> .....	366
Zugstab in allgemeiner Lage – ebene und räumliche Stabwerke – Lagerbedingungen – Lagerkräfte – Beispiele	
§5. <b>Balkenwerke</b> .....	372
Torsion – Gesamtenergie – Balken mit Biegung und Torsion in fast allgemeiner Lage – Numerische Approximation	
§6. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	377
<b>Kapitel 8. Kontinuumstheorie</b> .....	379
§1. <b>Deformationen</b> .....	379
Deformation – Ableitung des Gradienten – Materialableitung (substantielle Ableitung) – PIOLA-Transformation – Zurückholen des Divergenzsatzes	
§2. <b>Die drei Transporttheoreme</b> .....	386
§3. <b>Die Erhaltungssätze</b> .....	388
Massen-, Impuls-, Drehimpuls-, Energieerhaltungssatz – Erhaltungssätze in Differentialform – Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	

§4. <b>Materialformen</b> .....	395
§5. <b>Über Prinzipien der Mechanik</b> .....	398
Extremalprinzip – Prinzip von D’ALEMBERT – – Prinzip von HAMILTON	
§6. <b>Lineare Elastizitätstheorie</b> .....	402
Verzerrungstensor und Spannungstensor – Extremalproblem und Variationsproblem – ST.VENANT-KIRCHHOFF-Material	
§7. <b>Scheiben</b> .....	407
Ebener Spannungszustand – Ebener Verzerrungszustand	
§8. <b>Die Kirchhoff-Platte</b> .....	409
Extremalproblem und Variationsproblem – Umwandlung – Randwertproblem – Randbedingungen – Beispiel	
§9. <b>Stark gebogene Platten und Membran</b> .....	416
§10. <b>Flüssigkeiten und Gase</b> .....	419
Erhaltungssätze – Bezeichnungen – Erhaltungsgleichungen für zähe Fluide	
§11. <b>Navier-Stokes-Gleichungen</b> .....	422
Geschwindigkeits-Druck-Form – Randwertproblem – Dimensionsfreies System – Stromfunktion-Wirbel-Form – Zusammenhang mit der Plattengleichung	
<b>Kapitel 9. Finite Elemente</b> .....	429
§1. <b>Elliptische Randwertprobleme</b> .....	429
Das Extremalproblem – Die schwache Form – Das Randwertproblem – Lösbarkeit	
§2. <b>Von der Formel zum Bild</b> .....	433
Problemstellung – Approximation – lineare Dreieckselemente – Implementierung von DIRICHLET-Randbedingungen – Implementierung von CAUCHY-Randbedingungen – Beispiel	
§3. <b>Konstruktion von Finiten Elementen</b> .....	438
Problemstellung – Reduktion auf das Einheitsdreieck – Beispiel – Formfunktionen – Natürliche Koordinaten im Dreieck	
§4. <b>Weitere Konstruktionselemente</b> .....	446
HERMITESche Elemente – Finite Elemente für Scheiben – Ein kubisches Dreieckelement für Platten – Ein Dreieckelement mit gebogenem Rand – Das ARGYRIS-Element	
§5. <b>Singuläre Elemente</b> .....	457
§6. <b>Navier-Stokes-Gleichungen</b> .....	462
Geschwindigkeits-Druck-Form – allgemeine Form für inkompressible Fluide – Approximation – Stromfunktion-Wirbel-Form – Gekoppeltes System – Randbedingungen	
§7. <b>Vermischte Anwendungen</b> .....	474
Wärmeleitung – Konvektionsströmungen – Massentransport – Flachwasserprobleme	



§8. **Beispiele** ..... 481  
 Navier-Stokes-Gleichungen – Konvektion – Flachwasserprobleme

§9. **Hinweise zu den MATLAB-Programmen** ..... 491

**Kapitel 10. Abriss der Tensorrechnung** ..... 497

§1. **Tensoralgebra** ..... 497  
 Basis- und Komponententransformation – Skalarprodukträume – Identifizierung von  $V$  und  $V_d$  – Allgemeine Tensoren – Darstellung und Transformation von Tensoren – Tensorprodukt – Der Vektorraum der Tensoren – Transformation von allgemeinen Tensoren – Verjüngung (Kontraktion) – Skalarprodukt von Tensoren – Herauf- und Herunterziehen von Indizes – Beispiele

§2. **Algebra alternierender Tensoren** ..... 515  
 Alternierende Tensoren – Alternierender Anteil von Tensoren – Äußeres Produkt von Tensoren – Basis – Darstellung alternierender Tensoren – Basistransformation – Skalarprodukt alternierender Tensoren

§3. **Differentialformen im  $\mathbb{R}^n$**  ..... 521  
 Der abstrakte Tangentialraum und PFAFFSche Formen – Differentialformen – Äußere Ableitung – Geschlossene und exakte Formen – HODGE-Stern-Operator und Integralsätze – Abbildungen – „Pull back“ und „Push forward“

§4. **Tensoranalysis** ..... 534  
 EUKLIDISCHE Mannigfaltigkeiten – Natürliche Koordinatensysteme – Darstellung und Transformation – CHRISTOFFEL-Symbole – Divergenz eines Skalarfeldes – Gradienten eines Tensors – Divergenz eines Tensorfeldes – Rotation eines Vektorfeldes

§5. **Beispiele** ..... 549  
 Orthogonale natürliche Koordinatensysteme – Divergenz und Rotation

§6. **Transformationsgruppen** ..... 554  
 Bezeichnungen und Definitionen – Beispiele – Einparametrische Transformationsgruppen – Die Erzeugende einer Gruppe

**Kapitel 11. Fallstudien** ..... 561

§1. **Ein Beispiel aus der Gasdynamik** ..... 561

§2. **Die Reissner-Mindlin-Platte** ..... 563

§3. **Beispiele zu Mehrkörperproblemen** ..... 565  
 Doppelpendel – Siebenkörperproblem (ANDREW'S Squeezer) – Roboter nach SCHIEHLEN

§4. **Tanzende Scheiben** ..... 568  
 Allgemeine Scheiben – Zahnräder mit Nullverzahnung

<b>Kapitel 12. Anhang</b> .....	575
<b>§1. Bezeichnungen und Tabellen</b> .....	575
Bezeichnungen – Maßeinheiten und physikalische Konstanten – Grundmatrizen für den quadratischen Ansatz – Formfunktionen für den vollständigen kubischen Ansatz	
<b>§2. Matrizen-Zoo</b> .....	579
<b>§3. Translation und Drehung</b> .....	580
<b>§4. Trigonometrische Interpolation</b> .....	582
<b>§5. Der Dualraum des <math>C[a, b]</math></b> .....	587
<b>§6. Zykloiden</b> .....	589
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	593
<b>Sachverzeichnis</b> .....	603