Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 8

Beweise, dass die folgende Formel für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$a(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Induktionsanfang $n = 1$: Linke Seite $=$ Rechte Seite $=$

$\Rightarrow$

Induktionsschritt:

Induktionsvor.:

Induktionsbeh.:

Beweis der Induktionsbehauptung:

Induktionsschluss:

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 9

Beweise: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $a(n) : x_n := n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar.

Induktionsanfang $n = 1$:

Induktionsschritt:

Induktionsvor.:

Induktionsbeh.:

Beweis der Induktionsbehauptung:
Hinweis: Betrachte $x_{n+1} - x_n$ und streiche als erstes alle Terme, die sich sofort wegkürzen lassen. Wende erst danach die binomische Formel $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ an.

Induktionsschluss:

Aufgabe 10

Wo liegt der Fehler? Es wird behauptet, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $x_n = 7^n$ durch 6 teilbar ist. Hier der Beweis:

Induktionsschritt: Es gilt $x_{n+1} - x_n = 7^{n+1} - 7^n = 7^n(7-1) = 6 \cdot 7^n$.
Die Differenz $x_{n+1} - x_n$ ist also durch 6 teilbar. Aus der Induktionsvoraussetzung, dass x_n durch 6 teilbar ist, folgt somit die Induktionsbehauptung, dass x_{n+1} durch 6 teilbar ist.

Induktionsschluss: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n = 7^n$ durch n teilbar.

Offensichtlich ist aber 7^n als Produkt ungerader Zahlen ungerade, also für kein $n \in \mathbb{N}$ durch die gerade Zahl 6 teilbar.

Hier liegt der Fehler:

Weiter auf Seite 3

Zusatzaufgabe 2

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + n^2 \leq 2^n$?

a) Überprüfe zunächst, ob die Ungleichung für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ gilt und trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein (J=ja, N=nein).

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
Formel ist wahr							

b) Ein Induktionsbeweis für die Ungleichung $n + n^2 \leq 2^n$ kann offensichtlich nicht bei $n = 1$ beginnen. Beweise mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass $n + n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ wahr ist. Wähle hierfür ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Die Formel ist nach Teil a) für $n =$ ☐ wahr.

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung:

Induktionsbehauptung:

Beweis der Induktionsbehauptung:
Hinweise: Im Induktionsschritt lässt sich $2(n+1) \leq n(n+1) = n^2 + n$ abschätzen.
Die Induktionsvoraussetzung muss zwei Mal angewandt werden.

Induktionsschluss: