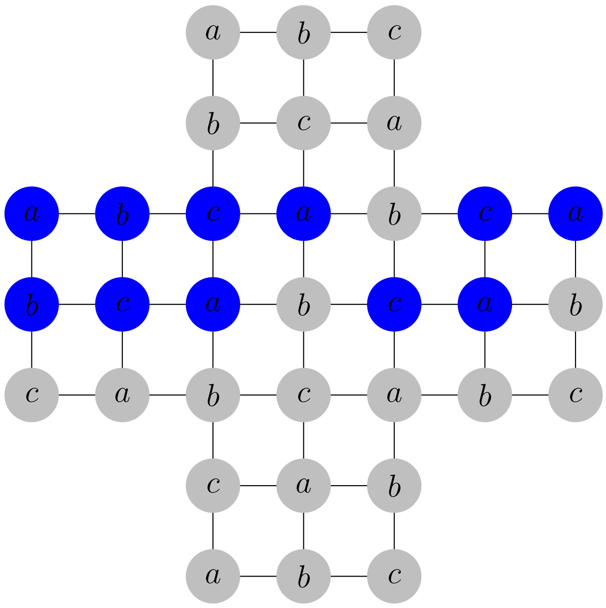
Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 7

Auf dem englischen Solitär-Spielfeld sind zu Beginn (also vor dem ersten Schritt) genau die blau markierten Plätze besetzt, siehe Graphik. Wenn nur ein Stein übrig bleibt, kann er auf a-, b- oder c-Plätzen stehen?

Mit a_n, b_n, c_n wird die Anzahl der Steine auf den Plätzen a bzw. b bzw. c vor dem n-ten Zug bezeichnet. Bei den erlaubten Spielzügen sind $b_n - a_n$, $c_n - a_n$ und $c_n - b_n$ invariant modulo 2.



a) Vor dem ersten Zug gilt $a_1 =$ ☐, $b_1 =$ ☐, $c_1 =$ ☐,

und somit $b_1 - a_1 =$ ☐, $c_1 - a_1 =$ ☐, $c_1 - b_1 =$ ☐.

b) Falls nach dem $(n-1)$-ten Zug nur noch ein Stein auf einem a-Platz steht, gilt

$b_n - a_n =$ ☐, $c_n - a_n =$ ☐, $c_n - b_n =$ ☐.

Ist dies möglich? Antwort: Dies ist ☐

c) Falls nach dem $(n-1)$-ten Zug nur noch ein Stein auf einem b-Platz steht, gilt

$b_n - a_n =$ ☐, $c_n - a_n =$ ☐, $c_n - b_n =$ ☐.

Ist dies möglich? Antwort: Dies ist ☐

d) Falls nach dem $(n-1)$-ten Zug nur noch ein Stein auf einem c-Platz steht, gilt

$b_n - a_n =$ ☐, $c_n - a_n =$ ☐, $c_n - b_n =$ ☐.

Ist dies möglich? Antwort: Dies ist ☐

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 8

Auf einem 7×7-Feld wird willkürlich in jedem Kästchen eine der Zahlen $+1$ oder -1 eingetragen.
Die Zahl α_1 bezeichne das Produkt der Zahlen, die in der ersten Reihe stehen, die Zahl α_2 das Produkt der Zahlen aus der zweiten Reihe usw.
Entsprechend bezeichne β_j das Produkt der Zahlen, die in der j-ten Spalte stehen. Beweise, dass für

$$S = \alpha_1 + \ldots + \alpha_7 + \beta_1 + \ldots + \beta_7$$

immer $S \neq 0$ gilt. Beantworte dazu die folgenden Fragen.

$\beta_1 = -1$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 1$	$\beta_4 = -1$	$\beta_5 = 1$	$\beta_6 = -1$	$\beta_7 = -1$	
-1	1	1	-1	-1	-1	1	$\alpha_1 = 1$
1	-1	1	-1	1	1	-1	$\alpha_2 = -1$
-1	-1	1	-1	1	-1	1	$\alpha_3 = 1$
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	$\alpha_4 = -1$
-1	1	1	-1	1	1	1	$\alpha_5 = 1$
1	-1	1	-1	-1	1	-1	$\alpha_6 = 1$
1	1	1	-1	-1	1	1	$\alpha_7 = 1$

a) Wenn bei einer der in den Kästchen eingetragenen Zahlen das Vorzeichen geändert wird, dann ändert sich die Summe $\alpha_1 + \ldots + \alpha_7$ um ☐

b) Wenn bei einer der in den Kästchen eingetragenen Zahlen das Vorzeichen geändert wird, dann ändert sich die Summe $\beta_1 + \ldots + \beta_7$ um ☐

c) Um wieviel kann sich der Wert von S ändern, wenn bei einer der in den Kästchen eingetragenen Zahlen das Vorzeichen geändert wird? (Es gibt drei Möglichkeiten.)
S kann sich um ☐ ändern.

d) S ist invariant modulo ☐

e) Wenn in jedem Kästchen die Zahl $+1$ steht, dann ist der Wert von S= ☐

f) Der kleinste nichtnegative Wert, den S annehmen kann, ist S= ☐

g) Zusatzaufgabe: Trage in dem nebenstehenden Feld in die Kästchen die Zahlen $+1, -1$ ein, so dass S den minimalen Wert aus Teil f) hat.

$\beta_1 =$	$\beta_2 =$	$\beta_3 =$	$\beta_4 =$	$\beta_5 =$	$\beta_6 =$	$\beta_7 =$	
							$\alpha_1 =$
							$\alpha_2 =$
							$\alpha_3 =$
							$\alpha_4 =$
							$\alpha_5 =$
							$\alpha_6 =$
							$\alpha_7 =$

Weiter auf Seite 3

Aufgabe 9

Gb für jede der angegebenen Permutationen an, wie viele Vertauschungen mindestens benötigt werden, um sie zu erzeugen, und ob sie gerade oder ungerade ist.

Permutation	Anzahl Vertauschungen	gerade/ungerade
$p = (1, 2, 7, 3, 4, 5, 6)$		
$p = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9)$		
$p = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1)$		

Aufgabe 10

Ein Ritter begegnet einem Drachen mit 15 Köpfen. Der Ritter kann ihm mit jedem Schwerthieb genau 4 Köpfe abschlagen. Nach einiger Zeit wachsen dafür 6 Köpfe nach. Wenn der Drache nur noch weniger als 4 Köpfe hat, kann der Ritter keine Köpfe abschlagen. (Beim Versuch, weniger als 4 Köpfe abzuschlagen, hat das extrem scharfe Schwert noch so viel Schwung, dass es den Ritter selbst trifft.) Wenn der Drache keine Köpfe mehr hat, ist er tot. Kann der Ritter den Drachen besiegen?

Gib eine zur Fragestellung passende Invariante an:

Die Größe $I =$ ______ ist invariant modulo ______.

Kann der Ritter den Drachen besiegen?

Antwort: